# EFFEKTIVA MOTSTÅNDET I LÅNGA SOLENOIDER VID HÖGFREKVENT VÄXELSTRÖM

AKADEMISK AVHANDLING

AV

WALDEMAR HALLSTRÖM

UPPSALA 1915
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

# EFFEKTIVA MOTSTÅNDET I LÅNGA SOLENOIDER VID HÖG-FREKVENT VÄXELSTRÖM

AKADEMISK AVHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AV

VITTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS
I UPPSALA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION
FÖR FILOSOFISKA DOKTORSGRADENS VINNANDE
TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

AV

**WALDEMAR HALLSTRÖM**
FILOSOFIE LICENTIAT AV VÄSTM.-DALA NATION

Å FYSISKA LÄROSALEN
LÖRDAGEN DEN 10 APRIL KL. 10 F. M.

UPPSALA 1915
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

## Innehållsförteckning.


Sid.

Inledning och Historik ..... 1

Princip för undersökningsmetoden ..... 27

Försöksanordning och mätningar ..... 30

- Solenoiderna ..... 31
- Kalorimetern ..... 32
- Svängningskretsen ..... 34
- Resonanskretsen ..... 39
- Observationerna ..... 40

Jämförelse med andras resultat ..... 46

- Battelli ..... 46
- Picciati ..... 47
- Cohen ..... 48
- Esau ..... 48
- Nicholson ..... 53
- Sommerfeldt ..... 54
- Lenz ..... 56

Sammanfattning ..... 61

Originalobservationer ..... 62

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523708_0044

## Beteckningar.

De olika författare, som arbetat på föreliggande arbetsområde, ha i allmänhet använt vitt skilda beteckningssätt för de olika storheter, som förekomma. För att i min framställning kunna använda ett enhetligt beteckningssätt har jag därför nödgats omskriva de olika formlerna med de av mig använda beteckningarna. Här nedan lämnas en förteckning över dessa.

$W_0$ = likströmsmotstånd.
$W$ = effektivmotstånd vid växelström i rak tråd.
$W'$ = » » » » solenoid.
$\sigma$ = spec. ledningsförmåga (el. magn. enheter).
$\mu$ = magnetisk permeabilitet.
$I_0$ = likströms styrka.
$I$ = momentan strömstyrka.
$I_m$ = strömamplitud.
$Q_0$ = värmeutveckling i rulle för likström.
$Q'$ = » » » » växelström.
$q_0$ = » » mättråden för likström.
$q'$ = » » » » växelström.
$n$ = svängningstal per sekund.
$\omega$ = $2\pi \cdot n$.
$\tau$ = perioden.
$H$ = magn. fältstyrka.
$R$ = solenoidradie.
$r$ = trådradie.
$d$ = kvadratisk tråds sida.
$g$ = gänghöjd.
$c$ = rulles längd.
$M$ = hela antalet varv på rullen.

$m$ = antalet lager av trådlindning.
$s$ = antalet varv per längdenhet.
$l$ = trådens hela längd.
$\eta$ = manometerutslag vid likström.
$\eta'$ = » » växelström.
$\zeta$ = galvanometerutslag vid likström.
$\zeta'$ = » » växelström.

$J$ och $J'$ äro Besselska funktioner resp. deras första derivator
$\mathfrak{Sin}$ och $\mathfrak{Cof}$ beteckna resp. hyperboliska funktioner.
$\Re$ betecknar, att endast reella delar medtagas.

## Inledning och Historik.

Då en växelström får genomgå en ledare, blir dennas motstånd större i den mån växelströmmens frekvens ökar, emedan strömlinierna ej, som vid likström, äro jämnt fördelade över ledarens hela tvärsnitt utan trängas ut mot ledarens yta. Detta fenomen, som fått namnet "skin"-effekt, har varit föremål för undersökning från många forskares sida, t. ex. MAXWELL,[1] RAYLEIGH,[2] STEFAN,[3] RUSSEL[4] och flera andra. För en rak, cylindrisk tråd med radien $r$ kan växelströmmotståndet $W$ uttryckas i följande allmängiltiga ekvation:

$$\frac{W}{W_0} = -\frac{r}{2}\,\Re\left(\frac{kJ_0(kr)}{J_0'(kr)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Här betyder $J_0$ BESSELS funktion av nollte ordningen, $J'$ dess första derivata och $\Re$, att endast de reella delarna skola medtagas. $W_0$ är likströmsmotståndet och $k = (1-i)\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}$, där $\omega$ är frekvensen på $2\pi$ sekunder.

Om man med $\sigma$ menar ledningsförmågan, med $\mu$ permeabiliteten hos tråden, med $n$ frekvensen och sätter $x = \pi r\sqrt{\mu\sigma n}$,

[1] MAXWELL: Treatise on Electricity and Magnetism II. p. 295. (Andra upplagan).

[2] RAYLEIGH: Phil. Mag. (5) 21. p. 369 och p. 381. 1886.

[3] STEFAN: Wien. Sitz.-Ber. 95. (II) p. 917. 1887.

[4] RUSSEL: Proc. Phys. Soc. 12. 1909.

så kan man ur den allmänna lösningen skriva speciella lösningar för olika fall på följande sätt.

För *små värden på* $x$ ($x < 0{,}65$):

$$\frac{W}{W_0} = 1 + \frac{1}{12}(2x^2)^2 - \frac{1}{180}(2x^2)^4 + \cdots; \quad \ldots \quad (2)$$

För *medelstora värden på* $x$ ($x$ mellan 1,5 och 10)

$$\frac{W}{W_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{1}{16x} + \cdots; \quad \ldots \quad (3)$$

För *stora värden på* $x$ (HERTZSKA vågor)

$$\frac{W}{W_0} = x; \quad \ldots \quad (4)$$

---

Om en rak tråd lindas upp i en solenoid, blir dess effektiva motstånd vid växelström större än det ur dessa formler beräknade. Detta beror därpå, att strömlinierna i tråden blir än mer koncentrerade, nämligen på den del av ledarens yta, som är vänd mot solenoidens axel.

Att dämpningen i en rulle är större än den ur dess motstånd beräknade, har rätt länge varit känt, och undersökningar häröver ha utförts av TALLQVIST,[1] SEILER,[2] EICHHORN[3] och LOMSCHÉ.[4] Man har emellertid ej förstått den verkliga anledningen utan sökt förklara fenomenet på andra sätt.

De första, som observerat en rulles motståndsökning för växelström, äro A. BATTELLI och L. MAGRI.[5] De förstodo också,

---

[1] TALLQVIST: Ann. d. Phys. 60. p. 248. 1897.

[2] SEILER: Ann. d. Phys. 61. p. 30. 1897.

[3] EICHHORN: Diss. Zürich. 1901/1902.

[4] LOMSCHÉ: Diss. Zürich. 1903.

[5] BATTELLI och MAGRI: Phys. Zeitschrift. 3. p. 539. 1902. Se även Phil. Mag. (6) 5. p. 1. 1903.

att denna motståndsökning beror på en koncentration av strömlinierna på en del av ledarens yta, som är vänd in mot rullens axel. De företogo också ett par mätningar genom att jämföra värmeutvecklingen hos en solenoid och en rak tråd, insatta i toluolfyllda kalorimetrar. De funno därvid, att förhållandet mellan motstånden i rulle och rak tråd av samma längd som i rullen ökar med antalet varv och med avtagande gänghöjd.

Oberoende av dessa forskare gjorde Dolezalek[1] samma iakttagelse vid en undersökning av självinduktionsnormaler. Han jämförde i en växelströmbrygga två normaler av olika tjock tråd och fann, att motståndet i den tjocka tråden steg med frekvensen. Genom beräkning konstaterade han, att detta ej berodde på rullens kapacitet, och han antog förklaringen ligga i en vid högre frekvenser uppträdande olikformig fördelning av strömlinierna. Han fann vidare, att man kan förminska denna motståndsökning genom att i stället för homogen tråd använda en sådan, spunnen av många från varandra isolerade fina trådar. Dolezalek, som vid sina mätningar använde frekvenser upp till 2300, fann, att motståndsökningen är proportionell mot $n^2$, och att den växer något hastigare än med kvadraten på trådens diameter.

På grund av den stora betydelse, som induktionsrullars motstånd har för den trådlösa telegrafien, har denna sak blivit föremål för ett ganska stort antal undersökningar av så väl teoretisk som experimentell art.

M. Wien[2] utgick från de av det variabla magnetfältet alstrade virvelströmmarna och beräknade energiförlusten på grund av dem. Han fann på denna väg effektivmotståndet $W'$ för en rulle med många lager tråd:

[1] Dolezalek: Ann. d. Phys. (4) 12. p. 1142. 1903.
[2] Wien: Ann. d. Phys. (4) 14. p. 1. 1904.

$$W' - W_0 = \frac{\omega^2 G^2 r^4 \pi l \sigma}{16} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Här betyder $\omega$ frekvensen på $2\pi$ sek., $l$ trådens hela längd, och $G$ definieras ur likheten $H_m = G I_m$ ($H_m$ = magn. fältets maximivärde och $I_m$ = strömamplituden). Om rullens längd är större än dess radie, så blir enligt HEYDWEILLER[1]:

$$G = \frac{4\pi M}{c}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left\{\frac{(R_1 + R_2)^2}{2} + \frac{(R_2 - R_1)^2}{6}\right\} + \frac{1}{c^4}\left\{\frac{6\,(R_1 + R_2)^4}{2} - \ldots\right\}\right],$$

där $M$ = hela antalet varv, $c$ = rullens hela längd samt $R_1$ och $R_2$ rullens inre resp. yttre radie. Genom att insätta detta värde på $G$ i (1) erhöll WIEN motståndet för en lång rulle:

$$W' - W_0 = \frac{16\pi^6\sigma}{3c^2} M^3 \left\{1 - \frac{(R_1 + R_2)^2}{c^2}\right\} (R_1 + R_2)\, r^4 n^2 \quad . (6)$$

För korta rullar använde WIEN en approx. formel för $G$ av HEYDWEILLER:

$$G = \frac{4\pi M}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{3 R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\right)$$

och erhöll på det sättet motståndet för en kort rulle:

$$W' - W_0 = \frac{4\pi^6 M^3 r^4 \sigma}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{3 R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\right)^2 n^2 \quad \ldots (7)$$

Han finner sedan ett formellt uttryck för effektivmotståndet i en godtyckligt formad ledare och löser detta uttryck för en *lång solenoid* (rulle med ett enda lager tråd.) Han får därvid:

[1] HEYDWEILLER: Hilfsb. f. die Ausführ. el. Messungen, Leipzig 1892.

$$W' = \frac{M}{\sigma (R - \sqrt{R^2 - r^2})} [1 + 0{,}272\, \omega^2 \Phi^2 - \cdots], \quad . \; . \; (8)$$

där

$$\Phi = \frac{2\pi^2 r^3 M \sigma}{c}.$$

Om isoleringen mellan varven är oändligt tunn, så att $\frac{2rM}{c} = 1$, blir:

$$W' = \frac{M}{\sigma (R - \sqrt{R^2 - r^2})} [1 + 0{,}272\, \omega^2 \pi^4 r^4 \sigma^2]. \quad . \; . \; (8\,a)$$

Ekvation (6) överensstämmer nära med Dolezalek's mätningar vid de låga frekvenser, denne använt. För att verifiera (8) har Wien själv gjort några mätningar i växelströmbrygga med telefon, varvid han jämförde solenoider med homogentråd och spunnen tråd med varandra och fann, att (8) lämnar goda värden, om frekvensen är så liten, att $\omega . \Phi < 0{,}5$.

Han har dessutom gjort ett par beräkningar över förhållandena vid spunnen tråd och därvid funnit, att motståndsökningen är proportionell mot kvadraten på frekvensen och omvänt proportionell mot kuben på antalet småtrådar.

Emedan de Wienska formlerna ej äro användbara för de höga frekvenser, som användas i den trådlösa telegrafien, upptogs frågan på nytt av A. Sommerfeldt.[3] Han angrep emellertid problemet i mycket idealiserad form. Så antog han en oändligt lång solenoid med stor radie, oändligt tunnt isolationsskikt mellan varven och tråd av kvadratiskt tvärsnitt. Han bestämde först fältet och strömfördelningen i ledaren och fann, att strömtätheten är störst i den del av ledarens yta, som är vänd in mot axeln. Han beräknade därefter effektivmotståndet. Om man sätter $\alpha = 2 (R_2 - R_1) \sqrt{2\pi\omega\sigma}$, där $R_2 - R_1$ blir lika med trådens tjocklek, fick han

[1] Sommerfeldt: Ann. de Phys. (4) 15. p. 673. 1904.

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{\alpha \operatorname{Sin}\alpha + \sin\alpha}{2 \operatorname{Cof}\alpha - \cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Sin och Cof äro de hyperboliska funktionerna.

Genom utveckling i potensserie övergår (9) till:

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{1 + \frac{\alpha^4}{5!} + \frac{\alpha^8}{9!} + \frac{\alpha^{12}}{13!} + \cdots}{1 + 2\frac{\alpha^4}{6!} + 2\frac{\alpha^8}{10!} + 2\frac{\alpha^{12}}{14!} + \cdots} \quad \ldots\ldots (10)$$

Om $\alpha$ är liten, kunna högre potenser av $\alpha$ försummas, och man får:

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + \frac{2\alpha^4}{3\,5!} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Som gränsvärde vid stora värden på $\alpha$ ($\alpha > 6$) erhåller han:

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{\alpha}{2} = V 2\pi\omega\sigma (R_2 - R_1) \quad \ldots\ldots (12)$$

För att få formlerna användbara för cylindrisk tråd sätter han $(R_2 - R_1)^2 = \pi r^2$ och får därvid $\alpha = 2\pi r V 2\omega\sigma$. Vid jämförelse med Wien's samt Battelli och Magri's mätningar visade det sig, att de ur formlerna beräknade värdena böra multipliceras med en koefficient, vars värde är ungefär 0,58.

För en rulle med $m$ lager tråd beräknade Sommerfeldt:

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{1}{2}\{\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)\} + \frac{D}{2}\{\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)\}; \quad \ldots (13)$$

Här är $\varphi(\alpha) = \frac{\alpha \operatorname{Sin}\alpha + \sin\alpha}{2 \operatorname{Cof}\alpha - \cos\alpha}$; och $\psi(\alpha) =$

$$= \alpha \frac{\operatorname{Sin}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{Cof}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{Cof}\alpha - \cos\alpha};$$

$$D = \frac{\left\{m + (m-1)\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right\}^2 + \left\{m - 1 + (m-2)\sqrt{\frac{R_3}{R_2}}\right\}^2 + \cdots}{\left\{m - (m-1)\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right\}^2 + \left\{m - 1 - (m-2)\sqrt{\frac{R_3}{R_2}}\right\}^2 + \cdots}.$$

För $m$ större än 5 kan man använda gränsformeln $D = \frac{4}{3}m^2$. För *små värden på* $\alpha$ kan man skriva:

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + \frac{1}{24}\cdot\frac{\alpha^4}{5!}(1 + 15\,D) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

För *mycket stora* $\alpha$

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{\alpha}{4}(1 + D) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Jämförelse med Dolezalek's mätningar ger vid handen, att de ur (14) och (15) beräknade värdena böra multipliceras med en koefficient, vars storlek är ungefär 0,75, om ekvationerna användas för cylindrisk tråd.

K. E. F. Schmidt[1] meddelar ett par mätningar, utförda på en solenoid i oljekalorimeter, varvid de använda frekvenserna icke överstigit 3000. Enligt såväl Wien som Sommerfeldt bör ju (Jmf. (5) och (14))

$$\frac{W' - W_0}{W_0} = kn^2.$$

Schmidt finner, att $k$ sjunker starkt med stigande frekvens. Mätningarna äro emellertid allt för få för att ur dem kunna draga några bestämda slutsatser.

A. Kleiner[2] uppdrar strömkurvan med Helmholtz' pendelavbrytare och beräknar motståndet för en rulle ur dämpningsdekrementet för frekvenser upp till 20000. Han finner, att $W'$ växer proportionellt mot $n^2$.

[1] Schmidt: Abh. Naturforsch. Gesellsch. Halle. 25. p. 117. 1904.
[2] Kleiner: Arch. des Sc. Phys. Genève. (4) 18. p. 262. 1904.

H. Mayer[1] använder samma metod för några rullar med många lager. Han jämför resultaten med Stefan's formel för "skin"-effekt och finner naturligtvis ingen överensstämmelse.

1905 offentliggjorde Thomas P. Black[2] en mer systematisk experimentell undersökning över motståndet i rullar vid hastiga elektriska svängningar. Denne insatte i samma svängningskrets en rak tråd och en av samma sorts tråd lindad rulle och jämförde de på bestämd tid utvecklade värmemängderna. För detta ändamål voro tråden och rullen insatta i kalorimetrar, bestående av lufttermometrar, som genom kautschukslangar stodo i förbindelse med alkoholmanometrar. Sedan utslagen på dessa avlästs för växelströmmen, skickades en likström genom kretsen. Genom variabla motstånd och shuntning reglerades så, att manometerutslagen vid likström och växelström blevo lika stora under samma tid. Härigenom kunde förhållandet mellan de i rullen och den raka tråden utvecklade värmemängderna beräknas och därmed även förhållandet mellan effektivmotstånden i rulle och rak tråd. Svängningarna alstrades i kondensatorkrets med gniststräcka. Mätningarna gjordes vid en frekvens $= 5 \cdot 10^5$ (antal strömväxlingar per sek. $= 10^6$), två bestämningar vid $2{,}5 \cdot 10^6$. Rullarna voro lindade av koppartråd med 0,15 eller 0,3 cm:s diameter. Rullarnas diameter varierade från 0,75 till 7,2 cm., varvid motståndet visade sig vara alldeles oberoende av denna. Om $\varkappa = r\,i\sqrt{n\sigma} > 6$ fann han, att förhållandet mellan motstånden i rulle och rak tråd $\frac{W'}{W}$ är oberoende av $n$. Han drog vidare ur sina mätningar den slutsatsen, att $\frac{W'}{W}$ är en funktion av förhållandet mellan gänghöjden och trådradien, ett resultat, som överensstämmer

[1] Mayer: Diss. Zürich. 1904.

[2] Black: Über den Widerstand von Spulen für schnelle elektrische Schwingungen. Dissertation Strassburg 1905. Se även: Ann. d. Phys. (4) 19. p. 157. 1906.

med senare framkomna teorier. Vid några mätningar på korta solenoider fann han, att $\frac{W'}{W}$ ökar med antalet varv, med ökad trådtjocklek och avtagande gänghöjd.

Battelli[1] upptog frågan på nytt från både teoretisk och experimentell synpunkt. Han beräknade först strömtätheten i olika delar av ledaren och fann, att denna är störst in mot rullens axel. Han beräknade sedan motståndet i en lång solenoid och fann:

$$W' = \frac{2 l \beta \sqrt{2}}{\sigma r} \left(\frac{\mu \sigma}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

där $l$ = trådens hela längd, $r$ = perioden och $\beta$ en obestämd konstant. För att få ett uttryck på förhållandet $W' : W$ dividerade han detta uttryck med Rayleigh's gränsformel för "skin"-effekt vid hög frekvens (jfr (4)) och erhöll därvid:

$$\frac{W'}{W} = 2\pi\beta\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{\mu\sigma}{\tau}}. \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

Som $\beta$ är en obestämd konstant, kunna (16) och (17) ej användas till kvantitativa beräkningar. Battelli gjorde ett par mätningar för att kontrollera formlerna. Dessa mätningar, som gjordes vid perioder mellan $1{,}4 - 8{,}2 \cdot 10^{-6}$, utfördes medelst kalorimetermetod. Kalorimetrarna voro fyllda med toluol och nedförda i Dewarska kärl. Enligt (17) bör $\frac{W'}{W}\sqrt[4]{\tau}$ vara konstant. De värden Battelli erhöll på denna konstant skilde sig åt på 7 à 8 %. Emellertid påpekar Sommerfeldt,[2] att Battelli vid sina försök ej haft rätt att använda Rayleigh's

[1] Battelli: Il nuovo Cim. (5) 11. p. 285. 1906. Se även Phys. Zeitschr. 8. p. 296, 530, 533 och 809. 1907. Även publicerad på andra håll.

[2] Sommerfeldt: Phys. Z. 8. p. 805. 1907.

gränsformel. Om han beräknat skin-effekten riktigt, hade avvikelserna blivit betydligt större. Battelli[1] bemöter detta i en kort uppsats.

Picciati[2] beräknade motståndet i långa solenoider och lyckades behandla problemet med något mindre idealisering än Sommerfeldt. Han bortser från gänghöjden, tar endast hänsyn till rent sinusformad ström och antar, att solenoiden är oändligt lång, samt att dess radie är stor jämförd med trådens, men han utgår från cylindrisk tråd. Efter att ha beräknat fältet övergår han till effektiva motståndet. Ur ett allmänt uttryck härleder han gränsformler för små och stora frekvenser. Han finner för *små frekvenser:*

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + r^4 . 4\pi^2\omega^2\sigma^2 \left\{ \frac{1}{48} + \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{c_\mu c_\mu}{\mu^2(\mu+1)} \right\} \quad . . (18)$$

och för *höga frekvenser:*

$$\frac{W'}{W_0} = r \sqrt{\frac{\pi\omega\sigma}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty c_\mu . \bar{c}_\mu \right\} . . . . . (19)$$

$c_\mu$ äro konstanter och $\bar{c}_\mu$ det med $c_\mu$ konjugerade komplexa uttrycket. Om kraftlinierna inne i solenoiden antagas rätliniga, kunna $c_\mu$ beräknas, och man får under denna förutsättning:

För *små frekvenser:*

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + 0{,}266\,\pi^4\omega^2\sigma^2 r^4 . . . . . (20)$$

För *höga frekvenser:*

$$\frac{W'}{W_0} = 2{,}467\, r \sqrt{\frac{\pi\omega\sigma}{2}} . . . . . (21)$$

[1] Battelli: Phys. Z. 9. p. 154. 1908.
[2] Picciati: Il nuovo Cim. (5) 11. p. 351. 1906.

På grundval av Picciati's beräkningar upptog Sommerfeldt[1] problemet ännu en gång för att även få fram effektivmotståndets beroende av gänghöjden. Han bortser emellertid fortfarande från solenoidens radie och antar, att den är oändligt lång. Efter att ha beräknat ett allmänt uttryck för $W' : W_0$

$$\frac{W'}{W_0} = -\frac{r}{2}\left[\Re\left\{\frac{kJ_0(kr)}{J'_0(kr)}\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 \sum_1^\infty c_\nu \bar{c}_\nu \Re\left\{\frac{kJ_\nu(kr)}{J'_\nu(kr)}\right\}\right], \quad (22)$$

(där $J$ betyda Besselska funktioner och $J'$ deras första derivator samt $\Re$ att endast de reella delarna skola medtagas. $c_\nu$ äro beroende av det magnetiska fältet. $k = (1 - i)\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}$.) ur vilket han som specialfall erhåller den redan förut kända lösningen för en rak tråd (jfr (1)), beräknar han gränsformler för små och stora frekvenser.

För *små frekvenser* erhåller han:

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + \frac{1}{4}\mu^2\omega^2\sigma^2 r^4\left\{\frac{1}{3} + \left(\frac{2\pi r}{g}\right)^2 + \frac{1}{216}\left(\frac{2\pi r}{g}\right)^4 + \cdots\right\}. \quad (23)$$

Denna ekvation, som gäller för omagnetiskt material, överensstämmer med Wien's ekvation för en lång solenoid, se (8), på 1 % när vid små gänghöjder, men vid större gänghöjder ger Wien's formel för små värden.

För *mycket höga frekvenser* finner Sommerfeldt:

$$\frac{W'}{W_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu\omega\sigma}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{g}\right)^2 \sum_1^\infty c_\nu^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

eller enklare uttryckt:

$$\frac{W'}{W_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu\omega\sigma}{2}}\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

[1] Sommerfeldt: Ann. d. Phys. (4) 24. p. 609. 1907.

Om gänghöjden är oändligt stor, d. v. s. tråden rak, blir $\frac{2\pi r}{g} = 0$ och således $\varphi = 1$. Sommerfeldt beräknar också det motsatta gränsvärdet på $\varphi$, d. v. s. när $\frac{2\pi r}{g} = \pi$, och finner, att $\varphi$ i detta fall är lika med 3,73. För att kunna använda (25) till numeriska beräkningar, beräknar han värdet på $\varphi$ för 3 olika värden på $\frac{2\pi r}{g}$ ur de Blackska mätningarna och drar med deras hjälp upp en kurva för $\varphi$.

Man ser av (23) och (25), att Sommerfeldt på teoretisk väg erhållit samma resultat som Black på experimentell, nämligen att $W' : W_0$ icke är beroende endast av gänghöjden, utan att det är en funktion av förhållandet mellan tråddiametern och gänghöjden.

Louis Cohen[1] beräknade effektivmotståndet hos en lång solenoid med tätt liggande varv, lindad av en tråd med kvadratiskt tvärsnitt. Om man med $\Delta W$ menar motståndssökningen i varje varv vid växelström, fann Cohen:

$$\Delta W = 128\, s^2 \omega^2 \pi d R \sigma \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\infty} \frac{1}{\gamma^2(\alpha_\gamma^2 + \beta_\gamma^2)} \cdot \frac{1}{\alpha_\gamma} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha_\gamma d + \frac{1}{\beta_\gamma} \sin 2\beta_\gamma d}{\mathfrak{Cof}\, 2\alpha_\gamma d - \cos 2\beta_\gamma d}. \quad (26)$$

Här är $s$ = antalet varv per cm, $d$ = trådens tjocklek,

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\gamma\pi}{d}\right)^2 + \sqrt{\frac{\left(\frac{\gamma\pi}{d}\right)^4 + 16\pi^2\sigma^2\omega^2}{2}}} \text{ och}$$

$$\beta = \sqrt{-\left(\frac{\gamma\pi}{d}\right)^2 + \sqrt{\frac{\left(\frac{\gamma\pi}{d}\right)^4 + 16\pi^2\sigma^2\omega^2}{2}}}.$$

[1] Cohen: Bull. Bureau of Standars 4. p. 161. 1907.

Summationen skall sträcka sig över alla udda tal för $\gamma$. Om $d$ är liten (1 à 2 mm) och frekvensen tämligen hög, reduceras formeln till:

$$\Delta W = 128\, s^2 \omega^2 \pi d R \sigma \sum_1^\infty \frac{1}{\gamma^2(\alpha_\gamma^2 + \beta_\gamma^2)\alpha_\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Serien är hastigt konvergent, så att redan vid frekvenser över 2000 räcker första termen. Om frekvensen är mycket hög, må vara $10^6$, och tråden ej allt för smal, kan man försumma $\left(\frac{\gamma\pi}{d}\right)^4$. Härvid blir $\alpha = \beta = \sqrt{2\pi\omega\sigma}$ och

$$\Delta W = \frac{32\, s^2 R d \sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_1^\infty \frac{1}{\gamma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Totala motståndet blir således: $W' = W_0 + \Delta W$.

För att få förhållandet $W' : W_0$ dividerade han med motståndet per varv för likström i en cylindrisk tråd med en diameter $d$ lika med den kvadratiska trådens tjocklek, således med $W_0 = \frac{8\pi R}{\sigma \pi d^2}$. På detta sätt erhöll han:

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + 4\, s^2 \sqrt{n\sigma}\, d^3 \sum_1^\infty \frac{1}{\gamma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Cohen utförde ett par mätningar med bryggmetod, varvid frekvensen var så låg som 896 och 1280. Avvikelsen mellan uppmätta och beräknade värden uppgick ända till 16 %.

För förhållandet $W' : W$ fann han:

$$\frac{W'}{W} = \frac{8\, s^2 d^2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{\gamma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Detta förhållande fann han således vara oberoende av frekvensen. Detta resultat står i full överensstämmelse med

vad Black fann rent experimentellt, under förutsättning att $\varkappa$ var tillräckligt stort.

F. Rusch[1] har på ett elementärare sätt härlett Kelvin's och Sommerfeldt's differentialekvationer för effektivmotståndet i rak tråd resp. solenoid. Han har vidare sökt beräkna dämpningens inflytande på motståndet. Härvid utgick han från Sommerfeldt's[2] första arbete och utgick således från samma förutsättningar som denne. Han skriver den Sommerfeldtska ekv. (13) (se sid. 6) under följande form:

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{1}{2}\{\Phi + \Psi\} + \frac{D}{2}\{\Phi - \Psi\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

$D$ har samma betydelse som hos Sommerfeldt (jfr sid. 7)

$$\Phi = \frac{\beta\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha + \alpha \sin 2\beta}{\mathfrak{Cof}\, 2\alpha - \cos 2\beta};$$

$$\Psi = 2\frac{\beta\, \mathfrak{Sin}\, \alpha \cos \beta + \alpha\, \mathfrak{Cof}\, \alpha \sin \beta}{\mathfrak{Cof}\, 2\alpha - \cos 2\beta}.$$

I dessa uttryck är $\alpha = (R_2 - R_1)\sqrt{2\pi\sigma(\omega - \delta)}$ och $\beta = (R_2 - R_1)\sqrt{2\pi\sigma(\omega + \delta)}$; $\delta$ = dämpningsfaktorn.

Han undersökte slutligen experimentellt, hur en självinduktionsrulle borde vara lindad för att få minsta möjliga motstånd. Han använde fria svängningar med frekvenser mellan 2000—26000, tog strömkurvan med Helmholtz' pendelavbrytare och beräknade motståndet ur dämpningen. Han fann därvid, att bland rullar av samma tvåd och med samma självinduktion får den det minsta motståndet, vilken är lindad som enkel solenoid.

E. Giebe[3] diskuterade det inflytande självinduktionen har

[1] Rusch: Vierteljahrschr. d. Naturf. Ges. Zürich 53. p. 74. 1908; Jahrb. d. dr. T. u. T. 1. p. 496. 1908; El.tekn. Z. 29. p. 1079. 1908.

[2] Se sid. 5.

[3] Giebe: Ann. d. Ph. (4) 24. p. 941. 1907.

vid motståndsmätningar med växelströmbrygga och högfrekvent växelström ($n$ omkring 2000). Han fann experimentellt,[1] att självinduktionsrullar av spunnen tråd visa motståndsökning redan vid så låga frekvenser som 2000 à 3000. Han fann vidare, att denna motståndsökning blir mindre, om man använder ett mycket stor antal småtrådar, att isolationen mellan dessa måste vara mycket god, och att de böra spinnas på särskilt sätt.

A. Meissner[2] gjorde en undersökning över, hur man borde konstruera självinduktioner för högfrekvensteknik för att få minsta möjliga dämpning. Han fann, att de borde göras av spunnen tråd, småtrådarna mycket fina (0,07 mm), i form av flata rullar. Förhållandet mellan dessas höjd och diameter borde vara ungefär 0,4.

J. A. Fleming[3] har mätt effektivmotståndet hos raka trådar och ett par solenoider med kalorimetermetod. Han använde två identiska luftkalorimetrar, innehållande lika solenoider. Kalorimetrarna voro förenade med ett horisontellt rör, försett med en vätskeindex. Genom den ena solenoiden skickades växelström, genom den andra likström, och denna reglerades så, att värmeutvecklingen per tidsenhet blev lika i båda kalorimetrarna.

Enligt en metod liknande Wien's (han tänkte sig solenoiden uppdelad i ett stort antal koaxiala cylindrar), beräknade A. Esau[4] förhållandet $W' : W_0$ för en solenoid, lindad av en tråd, vars tvärgenomskärning begränsas av en godtycklig kurva

[1] Giebe: Z. f. Instr.k. 27. p. 153. 1907; 29. p. 151. 1909 och 31. p. 48. 1911.

[2] Meissner: Jahrb. d. dr. T. u. T. 3. p. 57. 1909.

[3] Fleming: The Electr. (2) 64. p. 381 och p. 716. 1909/1910; se även Jahr. d. dr. T. u. T. 3. p. 356. 1910.

[4] Esau: Widerst. und Selbstind. von Solenoiden für Wechselstrom. Diss. Berlin 1908. I utvidgad form publicerad i Ann. d. Phys. (4) 34. p. 57. p. 81. och p. 547. 1911.

$y = f(x)$, men vars tjocklek i radial led var $2r$. Detta uttryck löste han sedan för några olika specialfall.

1:sta fallet. Tråden elliptisk med halvaxlarna $r$ och $b$.

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + \left[\frac{2\pi^2 r^3 \left(\frac{b}{r}\right) M\sigma\omega}{c}\right]^2 . \; 0{,}272 \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

I specialfallet cirkulär tråd övergår denna ekv. till Wien's, se (8).

2:dra fallet: Trådens tvärsnitt rektangulärt med sidorna $2r$ och $2b$

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + \left[\frac{8 b r^2 \pi M\sigma\omega}{c}\right]^2 0{,}356 \left\{1 - \frac{r}{R} + 0{,}62 \frac{r^2}{R^2}\right\}. \; (33)$$

Om solenoidens radie är mycket stor jämfört med trådens tjocklek, kan den sista faktorn försummas. Om man därjämte antar, att varven ligga tätt intill varandra, blir (33) identisk med Sommerfeldt's ekv. för små argument. (Se (11)). För att utvidga Sommerfeldt's allmänna uttryck (9) även för det fall, att gänghöjden är stor, antar Esau godtyckligt, att även för detta fall fältet inne i solenoiden är rätlinigt. Han inför i stället för Sommerfeldt's uttryck $\alpha$ ett nytt $\alpha'$ genom att sätta Sommerfeldt's ekv. (11) lika med sin egen (33), varigenom man får

$$\alpha' = 4r \sqrt{\frac{2b}{g}} 1{,}2\pi\omega\sigma \sqrt[4]{1 - \frac{r}{R} + 0{,}62 \frac{r^2}{R^2}}, \text{ eller om } \frac{r}{R} \text{ är liten}$$

$$\alpha' = 4r \sqrt{\frac{2b}{g}} 1{,}2\pi\omega\sigma.$$

Han omräknade vidare Picciati's formler på samma sätt. För att experimentellt verifiera sina resultat företog han en del mät-

ningar i växelströmsbrygga, varvid han använde frekvenser upp till 6000. Jämförelsesolenoiden var lindad av spinntråd bestående av 64 småtrådar med 0,2 mm:s tjocklek. Han utgick egendomligt nog från, att denna skulle vara fri från motståndsändring. Vid användande av kvadratisk tråd fick han mycket god överensstämmelse mellan observerade och beräknade värden, så länge gänghöjden var mindre än 3 ggr. trådens tjocklek. Om gänghöjden ökades än mer, kom han till det egendomliga resultatet, att motståndet ökade i stället för att minska. Vid cirkulär tråd var överensstämmelsen mindre god. Ehuru han arbetat med så låga frekvenser, använde han dock formlerna för stora argument, emedan hans trådar voro grova (2 à 6 mm tjocka). Han gjorde även några jämförelser med Picciati's och Cohen's formler. De förra gåvo goda resultat, de senare ända till 30 % för låga.

För rullar med många lager av kvadratisk tråd beräknade han motståndet enligt Wien's metod och fann formler, som endast på talfaktorer när skilde sig från Sommerfeldt's motsvarande formler (se (14) och (15)). Vid företagna mätningar fann han god överensstämmelse mellan observerade och beräknade värden, så länge $\alpha = 2d\sqrt{2\pi\omega\sigma} < 3$, och om antalet skikt var stort.

Till slut beräknade Esau dämpningens inflytande på effektivmotståndet hos en lång solenoid. Härvid genomförde han räkningen i enlighet med Sommerfeldt med den enda skillnaden, att han utgick från dämpade svängningar. Han fann:

*För långsamma svängningar:*

$$\frac{W'}{W_0} = 1 + \frac{16}{45}(2r)^4\pi^2\omega^2\sigma^2(1+\delta^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Motståndet ökas således med dämpningsdekrementet $\delta$.

*För hastiga svängningar:*

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{1}{4(1+2\delta^2)} 2{,}2\, r \sqrt{2\pi\omega\sigma} \sqrt{\sqrt{1+\delta^2}-\delta} \cdot \tag{35}$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{\sqrt{1+\delta^2}+\delta}{\sqrt{1+\delta^2}-\delta} - \delta \sqrt{\frac{\sqrt{1+\delta^2}+\delta}{\sqrt{1+\delta^2}-\delta}} + \delta^2 \left( 2 + \frac{\sqrt{1-\delta^2}+\delta}{\sqrt{1+\delta^2}-\delta} \right) \right\}$$

För små värden på $\delta$ förenklas (35) till

$$\frac{W'}{W_0} = 2\, r \sqrt{2\pi\omega\sigma} \left( 1 - \frac{\delta^2}{8} \right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Dämpningen kommer således vid stora argument att minska motståndet, men ändringen är så liten, att den vid $\delta = 0{,}2$ ej uppgår till mer än 0,5 %. Beräkningarna gälla för kvadratisk tråd, men han anser, att dämpningens inverkan bör vara lika även vid rund tråd och vid rullar. Han anser sig också få detta bekräftat genom jämförelse med mätningar av Rusch och Black. Han kritiserar vidare Rusch's beräkningar över dämpningens inflytande.

J. W. Nicholson[1] beräknar motståndet för en lång solenoid med stor radie och cylindrisk tråd under antagande av, att gänghöjden är relativt stor i förhållande till trådens radie. Han finner först ett allmänt uttryck på $W'' =$ motstånd per längdenhet av tråd:

$$W'' = -2\mu\omega Q + \frac{\mu\omega r^2}{4R^2} \cos^2\gamma (1 - 5\sin^2\gamma) PQ . \quad . \quad . \quad (37)$$

Här är $\gamma =$ skruvvinkeln $=$ arctg $\frac{c}{2\pi MR}$. Funktionerna $P$ och $Q$ definieras ur

[1] Nicholson: Phil. Mag. 19. p. 77. 1910; Proc. Phys. Soc. London 22. p. 114. 1909/1910; Jahrb. d. dr. T. u. T. 4. p. 26. 1910.

$$-r\sqrt{4\mu\pi\omega\sigma}\,Q = \frac{\operatorname{ber} x \operatorname{bei}' x - \operatorname{bei} x \operatorname{ber}' x}{(\operatorname{ber}' x)^2 + (\operatorname{bei}' x)^2}$$

$$x = r\sqrt{4\mu\pi\omega\sigma}$$

$$r\sqrt{4\mu\pi\omega\sigma}\,P = \frac{-\operatorname{ber} x \operatorname{ber}' x + \operatorname{bei} x \operatorname{bei}' x}{(\operatorname{ber}' x)^2 + (\operatorname{bei}' x)^2}$$

ber- och bei-funktionerna finnas tabellerade i Phil. Mag. (6) 19. p. 49. 1910. Som gränsfall erhålles:

Vid *hög frekvens:*

$$W'' = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi r^2\sigma}}\left\{1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi\mu\sigma\omega r^2}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8\pi\mu\sigma\omega r^2} - \right\} -$$

$$- \frac{1}{32\pi R^2\sigma}\cos^2\gamma(1 - 5\sin^2\gamma)\,.$$

$$\cdot\left\{1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi\mu\omega r^2\sigma}} - \frac{9}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{8\pi\mu\omega\sigma r^2}\right)^3}\right\} \quad (38)$$

och i gränsfallet *mycket hög frekvens:*

$$W'' = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi r^2\sigma}} - \frac{1}{32\pi R^2\sigma}\cos^2\gamma(1 - 5\sin^2\gamma). \quad (39)$$

Giltighetsvillkor äro $R > 12\,r$; $r\sqrt{n} > 70$.

Vid *låg frekvens:*

$$W'' = \frac{1}{\pi r^2\sigma}\left\{1 + \frac{1}{12}(\pi\mu\sigma\omega r^2)^2 - \frac{1}{180}(\pi\mu\omega\sigma r^2)^4 + - \right\} -$$

$$- \frac{1}{32\pi R^2\sigma}\cos^2\gamma(1 - 5\sin^2\gamma)\,.$$

$$\cdot\left\{1 + \frac{1}{24}(\pi\mu\sigma\omega r^2)^2 - \right\}. \quad (40)$$

Giltighetsvillkor äro $R > 12\,r$; $R\sqrt{n} > 50$; $r\sqrt{n} < 10$.

R. Lindemann[1] upptog frågan, hur spunna trådar böra göras för att få minsta möjliga motståndsökning. Han fann, att alla småtrådarna böra vara likvärdiga, d. v. s. skära ledarens tvärsnitt på motsvarande ställen lika ofta, och att god isolation mellan dem är av största vikt. Han använde odämpade svängningar från en Poulsengenerator, för korta vågor (300—500 m) svagt dämpade svängningar enligt Wien's "Stoss-erregung". Det sökta motståndet satt i resonanskretsen. Utslagen mättes vid resonans med och utan ett känt tillsatsmotstånd, och ur dessa mätningar kunde motståndet lätt beräknas. Vid undersökningar på rullar av idealt spunna trådar fann han, att för enkla solenoider växte motståndet proportionellt mot $n^2$ även för hastiga svängningar. För rullar med många lager växte motståndet än hastigare. För de av honom undersökta rullarna kunde han uppställa empiriska formler för motståndsökningen av formen

$$\frac{W' - W_0}{\omega^2} = a + b\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$a$ och $b$ äro konstanter beroende av rullarnas dimensioner.

Som motståndet vid homogen tråd och höga frekvenser växer proportionellt mot $\sqrt{n}$, måste tydligen motståndet i en rulle av spunnen tråd vid tillräckligt hög frekvens bli större än motståndet i en identiskt lika rulle av homogen tråd.

W. Lenz[2] ger en resumé över de viktigaste formlerna för motståndsökningar hos rullar och kritiserar därvid särskilt Nicholson's formler. Dessa ge de bästa värdena vid medelstora svängningstal. Vid små och stora frekvenser visar Lenz, att Nicholson's formler övergå till de för rak tråd gällande.

H. E. Möller[3] söker teoretiskt förklara det av Lindemann

[1] Lindemann: Verh. d. d. Phys. G. 11. p. 682. 1909 och 12. p. 572. 1910. Se även Jahrb. d. dr. T. u. T. 4. p. 561. 1911.

[2] Lenz: Jahrb. d. dr. T. u. T. 4. p. 481. 1911.

[3] Möller: Ann. d. Phys. (4) 36. p. 738. 1911.

experimentellt funna sakförhållandet, att motståndet vid höga frekvenser kan bli större i en rulle av spunnen tråd än i en av homogen. Han finner förklaringen vara följande: I en spunnen tråd är magnetfältet konstant genom hela tråden. Detta magnetfält alstrar vid höga frekvenser så starka virvelströmmar, att strömmen på trådens utsida får motsatt riktning mot huvudströmmen. I en homogen tråd avtar magnetfältet från den mot rullens axel vända sidan mot yttersidan till, där det praktiskt taget är noll. Härigenom kan bakströmmen på yttersidan ej komma till stånd. Dessutom återverka virvelströmmarna på magnetfältet, så att ökningen i virvelströmmar och motstånd bli allt mindre vid växande frekvens. Han finner emellertid, att den frekvens, vid vilken motståndet i identiska rullar av spunnen och massiv tråd blir lika stort, är i hög grad beroende på hur den spunna tråden tillverkas. Denna frekvens ökar t. ex. med det fyrdubbla, om antalet småtrådar ökas till det dubbla. Han anser därför, att man även vid den trådlösa telegrafiens höga frekvenser kan uppnå betydande fördelar med rullar av spunnen tråd, om denna tillverkas på rätt sätt.

I ett senare arbete[1] utvecklar han vidare sin teori. Han anger formler för motståndet i solenoider med spunna trådar samt ger överskådliga diagram visande motståndets beroende av frekvens och antalet småtrådar.

K. Herrmann[2] har gjort några kvalitativa försök med kalorimetermetod för att verifiera Lindemann's upptäckt, att motståndet kan bli större vid spunnen än vid massiv tråd. Hans rullar, gjorda av massiv och spunnen tråd, voro nedsatta i identiska kalorimetrar, fyllda med paraffinolja och försedda med kapillärrör. Hans resultat överensstämma med Lindemann's.

[1] Möller: Jahrb. d. dr. T. u. T. 9. p. 32, 1914.
[2] Herrmann: Verh. d. d. Phys. G. 13. p. 978, 1911.

W. Lenz[1] har beräknat kapaciteten för en lång solenoid. Härvid måste han ägna problemet om solenoidens magnetiska fält en ingående behandling, och sedan fick han lätt fram uttryck för såväl motstånd som självinduktion. Han upptog problemet i anslutning till Sommerfeldt och behandlade långa solenoider med de enda inskränkningarna, att längden är stor i förhållande till radien, och att förhållandet solenoidradie: gänghöjd är stort mot 1. Dessutom måste trådens längd vara liten mot den använda våglängden, emedan strömmen annars ej är kvasistationär.

Han erhöll samma allmänna uttryck för $W' : W^0$ som Sommerfeldt. (Se (22).) Han erhöll därför också samma gränsformler som denne, men han gick ett steg längre. Den Sommerfeldtska funktionen $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{g}\right)^2 \Sigma c_i^2$ blev av Sommerfeldt aldrig löst annat än för gränstallen $\varphi(\infty) = 3{,}73$ och $\varphi(0) = 1$. Som emellertid Lenz kunnat beräkna konstanterna $c_i$, kunde han även beräkna $\varphi$ för godtyckliga värden på $\frac{2\pi r}{g}$. Han anger följande tal, där sista decimalen är osäker.

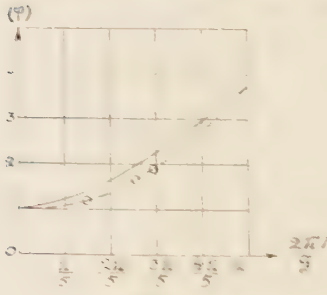

Fig. 1.

| $\frac{2\pi r}{g}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi =$ | 1,076 | 1,28 | 1,92 |

Den $\varphi$-kurva man erhåller ur dessa tal ligger högre än den av Sommerfeldt med tillhjälp av Black's mätningar interpolerade kurvan, vilket framgår av fig. 1, där Lenz' kurva är den utdragna och Sommerfeldt's den streckade.

[1] Lenz: Über das elektrom. Wechselfeld der Spulen und deren Wechselstromwiderstand, Selbstind. und Kapazität. Diss. München 1911. Se även Ann. d. Phys. (4) 37. p. 923. 1912.

M. Vos[1] har sökt beräkna, hur en rulle borde lindas, för att dess dämpning skall bli ett minimum. Han fann att $2R:c$ bör vara ungefär 2,5, och att vid stora argument gänghöjden bör vara 4,35 ggr. trådens diameter.

R. Lindemann och W. Hüter[2] ha fortsatt den förres undersökningar för att ytterligare styrka, att motståndet kan bli högre med spunnen än med massiv tråd. De undersökte nu korta, cylindriska och plana, spirallindade spolar, av vilka de senare visade sig vara oförmånligare än de förra. De jämförde rullar av cylindrisk tråd, spunnen tråd och band. Vid rullar med samma radie, självinduktion och tvärsnitt på ledaren voro bandrullarna fördelaktigast, de av spinntråd ibland ofördelaktigast. Gjordes i stället gänghöjd och varvantal lika ändrades förhållande mycket till nackdel för bandrullarna. Vid korta bandrullar, som hade olika tjocka band, ehuru de i övrigt voro identiska, kunde motståndet bli större med de tjockare banden. För motståndet i en kort rulle angiva de empiriska formler av utseendet

$$W = A l \omega + B \omega^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

där $A$ och $B$ äro beroende av rullens konstanter.

L. W. Austin[3] har gjort några mätningar på korta solenoider enligt en kalorimetermetod. Han jämförde 2 lika rullar i identiska, petroleumfyllda kalorimetrar. Genom den ena skickade han likström, genom den andra växelström. Den senare reglerades så, att temperaturen blev lika i båda kalorimetrarna, vilket kontrollerades med differentialtermoelement.

Emedan Lenz vid sina beräkningar inskränkt sig till att behandla endast långa solenoider, upptogs frågan åter av C.

[1] Vos: Verh. d. d. phys. G. 14. p. 683. 1912.
[2] Lindemann och Hüter: Verh. d. d. phys. G. 15. p. 219. 1913.
[3] Austin: Jahrb. d. dr. T. u. T. 8. p. 159. 1914.

W. Oseen,[1] som genomförde räkningen även för solenoider, vilkas längd är liten i förhållande till radien. Motståndet blir olika i de olika varven. Om man med $\mu$ och $\mu'$ betecknar två särskilda varvs ordningsnummer, finner Oseen rent generellt:

$$\frac{W'_{\mu\mu'}}{W_0} = -\frac{r}{2}\left\{\Re\begin{bmatrix} kJ_0(kr) \\ J'_0(kr)\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2}{8I_1^2}\sum_1^\infty (c_{\mu\nu}c_{\mu'\nu} + d_{\mu\nu}d_{\mu'\nu})\,\Re\begin{bmatrix} kJ_\nu(kr) \\ J'_\nu(kr)\end{bmatrix}\right\} \quad (43)$$

$I_1$ definieras ur ekvationen för strömstyrkan $I = I_1 e^{i\omega t}$.

Härur härleder han sedan gränsformler för små och stora argument.

*Små argument:* Om $k = (1-i)\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$

$$\frac{W'_{\mu\mu'}}{W_0} = 1 + \left(\frac{|k|\cdot r}{2}\right)^4 P_{\mu\mu'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

där

$$P_{\mu\mu'} = \frac{1}{12} + \left(\frac{r}{g}\right)^2\left[\left(\sum_1^{M'}{}_{(\mu)} \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{g X_{0\mu'}}{2 I_1}\right)^2 + \frac{g^2 Y_{0\mu'}^2}{4 I_1^2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{r}{g}\right)^4\left(\sum_1^{M'}{}_{(\mu)} \frac{1}{(\mu' - \mu)^2}\right)^2 + \frac{1}{18}\left(\frac{r}{g}\right)^6\left(\sum_1^{M}{}_{(\mu)} \frac{1}{(\mu' - \mu)^3}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{40}\left(\frac{r}{g}\right)^8\left(\sum_1^{M'}{}_{(\mu)} \frac{1}{(\mu' - \mu)^4}\right)^2$$

För en *oändligt lång solenoid* blir $X = 0$ $Y = \dfrac{2\pi I_1}{g}$ och (44) övergår i Sommerfeldt-Lenz' formel för små argument.

För en *mycket kort solenoid* blir $X = Y = 0$, varigenom uttrycket $P_{\mu\mu'}$ kan numeriskt beräknas, då varvantalet är givet.

[1] Oseen: K. Sv. Vetensk. Ak. Ark. för mat., astr. och fysik 9, n:o 27. 1914.

För *stora argument:*

$$\frac{W'_{\mu'}}{W_0} = r\sqrt{\frac{\pi\omega\mu\sigma}{2}}\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

där

$$\varphi = 1 + \frac{r^2}{8\,I_1^2}\sum_{0}^{\infty}{}_{(\nu)}\,(c_{\mu'\nu}\,\bar{c}_{\mu'\nu} + d_{\mu'\nu}\,\bar{d}_{\mu'\nu}).$$

Oseen finner alltså, att effektivmotståndet växer proportionellt mot $\sqrt{\omega}$, ett resultat, som icke överensstämmer med Lindemann och Hüter's experimentellt funna resultat, att $W' = A\sqrt{\omega} + B\omega^2$. Jfr sid. 23.

Sedan det genom Lindemann's och andras undersökningar visat sig, att växelströmmotståndet i rullar kan bli större vid användande av spinntråd än massivtråd vid de i den trådlösa telegrafien använda frekvenserna, har motståndet i rullar av massivtråd åter fått ett större intresse. Frågan har också, som av det föregående synes, varit föremål för många teoretiska undersökningar. Vad experimentella undersökningar beträffa, föreligger däremot ett ganska sparsamt observationsmaterial. Detta gäller särskilt motståndet i enkla solenoider vid högfrekvent ström. Den enda systematiska undersökning häröver, som finnes, är den, som gjorts av Black, och även denna är långt ifrån fullständig. Han har t. ex. i huvudsak endast gjort undersökningar vid en enda frekvens, hans mätningar äro ganska få, och dessutom kan man hysa tvivel om noggrannheten av hans mätningar, särskilt med anledning av det sätt, varpå injusteringen för lika utslag vid lik- och växelström skedde. Det har därför synts önskvärt att få till stånd ännu en experimentell undersökning över motståndet i solenoider för högfrekvent ström.

Det är av denna anledning föreliggande arbete kommit till stånd. Undersökningen har emellertid inskränkts till att behandla motståndet i långa solenoider.

Ifrågavarande undersökning har utförts på Uppsala universitets fysiska institution. Det är mig en kär plikt att till denna institutions prefekt, Herr Professorn D:r G. Granqvist, framföra ett vördsamt tack, dels för uppslaget till detta arbete, dels för det stora intresse, varmed han följt detsamma och för de många råd och uppslag han givit under arbetets gång samt för den stora beredvillighet, varmed han ställt såväl institutionens som sina egna instrument och apparater till mitt förfogande.

## Princip för undersökningsmetoden.

Växelströmmotståndet i en ledare kan definieras såsom förhållandet mellan den på tidsenheten utvecklade energimängden och kvadraten på strömmens medelvärde under samma tid, således:

$$W' = \frac{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} Q\,dt}{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} I^2\,dt} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

där $Qdt$ är den på tiden $dt$ utvecklade energimängden, $\tau$ växelströmmens period och $I$ dess momentanvärde.

För bestämning av $W'$ har jag, i anslutning till ovanstående, använt en kalorimetermetod. Emellertid har jag ej bestämt effektiva motståndet direkt utan, som vi nedan skola se, endast förhållandet $W' : W_0$. Jag har därför ej behövt bestämma energiutvecklingens absoluta värde, utan kunnat anordna försöken enligt följande princip.

Den solenoid, vars motstånd skulle undersökas, insattes i en lufttermometer, som var försedd med en manometer. Vid likström $I_0$ är värmeutvecklingen i solenoiden proportionell mot strömstyrkans kvadrat. Vid mätningarna visade sig också manometerutslagen proportionella mot $I_0^2$ (Se fig. 14, 16 och 18). I strömbanan var även insatt en fin koppartråd (diam. $= 0{,}1$ mm). Denna uppvärmdes av strömmen och fick stråla

mot ett termokors, som var förbundet med en galvanometer, vilkens utslag således var ett mått på strömstyrkan såväl vid likström som växelström. I motsats till manometerutslagen voro galvanometerutslagen emellertid icke proportionella mot $I_0^2$. Vid försöket gjordes nu två serier, en med likström och en med växelström. Vid likström var värmeutvecklingen per sekund

$$\text{i solenoiden: } Q_0 = 0{,}24\, W_0 I_0^2 = k\eta$$

$$\text{i mättråden: } q_0 = 0{,}24\, w_0 I_0^2 = \varphi(\zeta),$$

varest funktionen $\varphi(\zeta)$ anger sambandet mellan värmeutvecklingen i koppartråden och galvanometerutslagen.

Vid växelström var värmeutvecklingen per sekund

$$\text{i solenoiden: } Q' = 0{,}24\, W' \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I^2\, dt = k\eta'$$

$$\text{i mättråden: } q' = 0{,}24\, w' \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I^2\, dt = \varphi(\zeta').$$

Här betyda $\eta$ och $\zeta$ utslagen på manometern och galvanometern resp.

Ur ovanstående ekvationer erhålles genom division:

$$\frac{Q'}{Q_0} = \frac{W' \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I^2\, dt}{W_0 I_0^2} = \frac{\eta'}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

samt

$$\frac{q'}{q_0} = \frac{w' \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I^2\, dt}{w_0 I_0^2} = \frac{\varphi(\zeta')}{\varphi(\zeta)} \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

Ur (47) och (48) erhålles:

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{w'\eta'\varphi(\zeta)}{w_0\eta\varphi(\zeta')} \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

Vid mina försök var alltid $\zeta = \zeta'$, alltså

$$\frac{W'}{W_0} = \frac{w'}{w_0} \cdot \frac{\eta'}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

$w' : w_0$ kan lätt beräknas enligt formlerna för skin-effekt.

## Försöksanordningar och mätningar.

De kalorimetriska motståndsmätningar på rullar, som hittills utförts, hava väsentligen gjorts enligt två något skilda principer. Enligt den ena, som blivit använd av Fleming och Herrmann, användas två "identiska" kalorimetrar med "identiska" rullar, den ena avsedd för likström, den andra för växelström. Med denna metod erhållas genomgående de fel, som uppkomma därigenom, att varken kalorimetrar eller rullar kunna göras identiska. Enligt den andra principen, som från denna synpunkt är vida att föredraga, användes samma rulle till såväl likström- som växelströmbestämningen. Denna senare princip har använts av Battelli och Black, ehuru båda i strömkretsen haft två kalorimetrar, av vilka den ena innehållit en rak tråd. De hava bestämt förhållandet $W' : W$. Black har härvid använt likströmmen för att med dess hjälp bestämma de mot vissa utslag på manometrarna svarande värmemängder, som per tidsenhet utvecklats i rullen och den raka tråden. Han gick därvid tillväga på det sättet, att han först gjorde en växelströmbestämning och observerade manometerutslagen, varpå han skickade likström genom kalorimetrarna och reglerade denna så, att manometerutslagen blevo de samma som vid växelström på samma tid. Black säger visserligen, att denna reglering är lätt och kräver kort tid. Som emellertid den kalorimeter, som innehöll den raka tråden, var kopplad i shunt med ett reglerbart motstånd, hade man

att reglera såväl motståndet i huvudledningen som i shunten, till dess utslagen på båda manometrarna fingo önskad storlek, är det uppenbart, att denna justering kräver en tid, som åtminstone måste räknas i minuter. För att nu detta tillvägagångssätt skall vara principiellt riktigt fordras, att manometerutslagen växa liniärt med tiden under försökets gång. Så är emellertid icke förhållandet, utan manometerutslagens tidskurva visa en stark böjning mot tidsaxeln. Härigenom erhålles ett icke oväsentligt fel med den av Black använda metoden, så vida man icke gör minst två regleringsserier, den senare för finjustering, vilket emellertid med hänsyn till den långa tid, som behövs mellan varje försök för erhållande av värmejämvikt, skulle göra mätningarna oerhört tidsödande. Vid en sådan reglering vänjer man sig även att utföra den på ett alldeles bestämt sätt i vissa tempo, och därför kommer med stor sannolikhet felet att i de olika mätningarna gå åt samma håll.

Min strävan har varit att utarbeta en metod, som varit fri från de olägenheter, som ovan påpekats, och att därjämte direkt mäta förhållandet $W' : W_0$, emedan detta är mycket bekvämare att använda än $W' : W$, då ju $W$ måste beräknas enligt formlerna för skin-effekt. Hur dessa fördelar vunnits framgår av den följande beskrivningen över metod och apparatanordningar.

**Solenoiderna.** I de flesta av de teorier, som behandla effektivmotståndet i solenoider, ha vederbörande författare bortsett från den eventuella inverkan på motståndet, som solenoidens diameter kunnat utöva. Genom de av Black företagna mätningarna framgick också, att motståndet är oberoende av solenoidens tvärgenomskärning. Med anledning härav har jag avstått från att göra några mätningar på rullar med olika dimensioner, utan inskränkt mig till att pröva motståndets beroende av övriga variabler: frekvens, trådradie och gänghöjd.

De undersökta solenoiderna ha lindats på ett tunnt glasrör; de flesta solenoider på ett och samma rör. Innan tråden lindades på röret, gjordes detta väl rent och hettades grundligt, för att ingen överledning skulle kunna ske genom fuktighetslagret. Trådarna befriades från oxidskikt med utspädd saltsyra. En ny solenoid undersöktes alltid omedelbart. Lindningen gjordes med stor omsorg i gängsvarv. Uppmätningen av den använda trådens dimensioner gjordes alltid sedan den varit upplindad, ty den var vid upplindningen utsatt för rätt stark sträckning, vilket gjorde, att den tänjdes betydligt. Trådarnas diameter uppmättes med mikrometerskruv. Dessa mätningar gjordes på olika ställen av tråden utefter hela dess längd till ett antal av ej mindre än 40 à 50 för varje tråd. Jag har sedan gjort om dessa mätningar med en annan mikrometer, och de ur de skilda mätningarna tagna medeltalen överensstämma med tre siffror; först i den fjärde siffran finnes en differens på några få enheter.

Trådarnas ledningsförmåga har bestämts i en brygga med manganinmotstånd från Otto Wolff, Berlin, och korrigerats till den temperatur, vid vilken solenoidernas effektivmotstånd mättes.

Mätningarna gjordes till största delen på vanlig teknisk koppartråd, varjämte en serie tagits med ren koppartråd från Kahlbaum. (Se tabell 3. Solen. n:r 13—16).

De undersökta solenoidernas konstanter framgå ur tabell 3, sid. 43, 44.

**Kalorimetern.** (Se fig. 2.) Denna bestod av ett ungefär 32 cm långt och 4 cm tjockt glasrör. Detta var upptill försett med ett lufttätt inslipat lock, genom vilket gick ett smalt, trattformigt, ungefär 5 cm långt rör, avsett för den ena tilledningstråden till solenoiden. Sedan tilledningstråden införts, fylldes detta rör med Kotinsky's cement för att göra det fullt

lufttätt. Solenoidens ena ända fastlöddes vid denna tilledningstråd, medan den andra var nedsänkt i en i kalorimeterns botten sittande kvicksilverkopp, som genom en i glasväggen insmält platinatråd kunde inkopplas i strömbanan. För att ej genom den yttre strömledningen störa solenoidens fält drogs denna ledning tämligen långt från solenoiden, varjämte den under kvicksilverkoppen sittande klämskruven var av mycket små dimensioner. Ett stycke från kalorimeterns övre kant

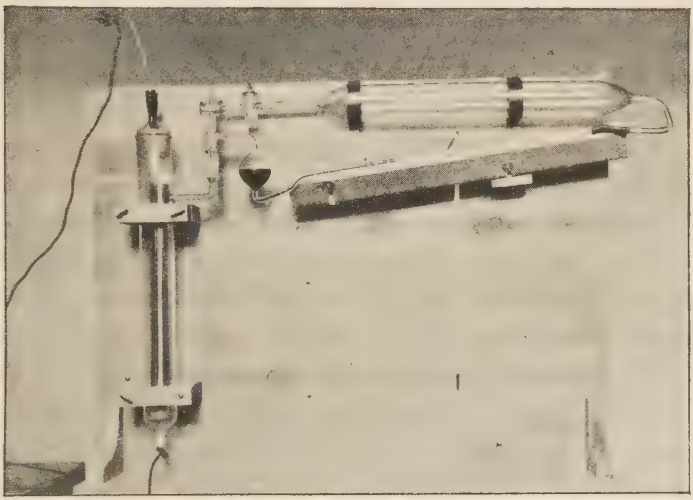

Fig. 2.

var ett sidorör insmält, och i detta var medelst en väl inslipad glaspropp fästad en manometer och en kran, varigenom kalorimetern kunde ställas i förbindelse med den yttre luften. Manometern bestod av en glaskula med 3,5 cm:s diameter, från vars botten utgick ett svagt stigande rör med en inre diam. av ungefär 1 mm. Detta rör lutade ungefär 20° mot horisontalplanet. Som manometervätska användes färgad metylalkonol, emedan utslagen tack vare denna vätskas ringa viskositet

hastigt följde tryckändringarna i kalorimetern. Utslagen avlästes på en millimeterskala.

Då vätskepelaren stiger i kapillärröret, sjunker vätskans yta i kulan något och därmed också det verkliga noll-läget på skalan. Det faktiskt avlästa utslaget är därför mindre än det verkliga. Om man emellertid antager, att vätskeytan i kulan är konstant vid de små nivå-ändringar, som här komma i fråga, så blir nollpunktens sänkning proportionell mot nivåsänkningen i kulan och därmed också mot det skenbara utslaget $\eta$. Som jag vid mina försök alltid haft förhållandet mellan två manometerutslag (jfr (50)), så inses, att jag kunnat använda de skenbara utslagen i stället för de verkliga.

Manometern visade sig vara mycket känslig för tryckändringar i den yttre luften. Om en dörr öppnades eller stängdes även på stora avstånd från arbetsrummet, märktes detta genast genom millimeterstora utslag, och vid blåsigt väder var manometern omöjlig att arbeta med. Det blev därför nödvändigt att skydda sig mot sådana yttre störningar genom att förbinda manometerrörets öppna ända med en sluten glasballong. Ballongen hade samma volym som luftkalorimetern, varigenom denna blev betydligt okänsligare för små ändringar i den omgivande luftens temperatur. Denna känslighet var i alla fall mycket stor, varför hela apparatanordningen placerades i ett för konstanta temperaturer särskilt avsett källarrum. Observationerna gjordes sedan med kikare från ett bredvidliggande rum genom ett med slipat glas försett fönster. Belysningen ordnades även med kraftiga lampor i observationsrummet.

**Svängningskresten.** (Se fig. 3). Den högfrekventa växelströmmen erhölls i en kondensatorkrets med gniststräcka. Som energikälla användes ett mindre s. k. resonansinduktorium, vars primärrulle matades med växelström om 50 perioder och ungefär 60 volts effektiv spänning. Sekundär-

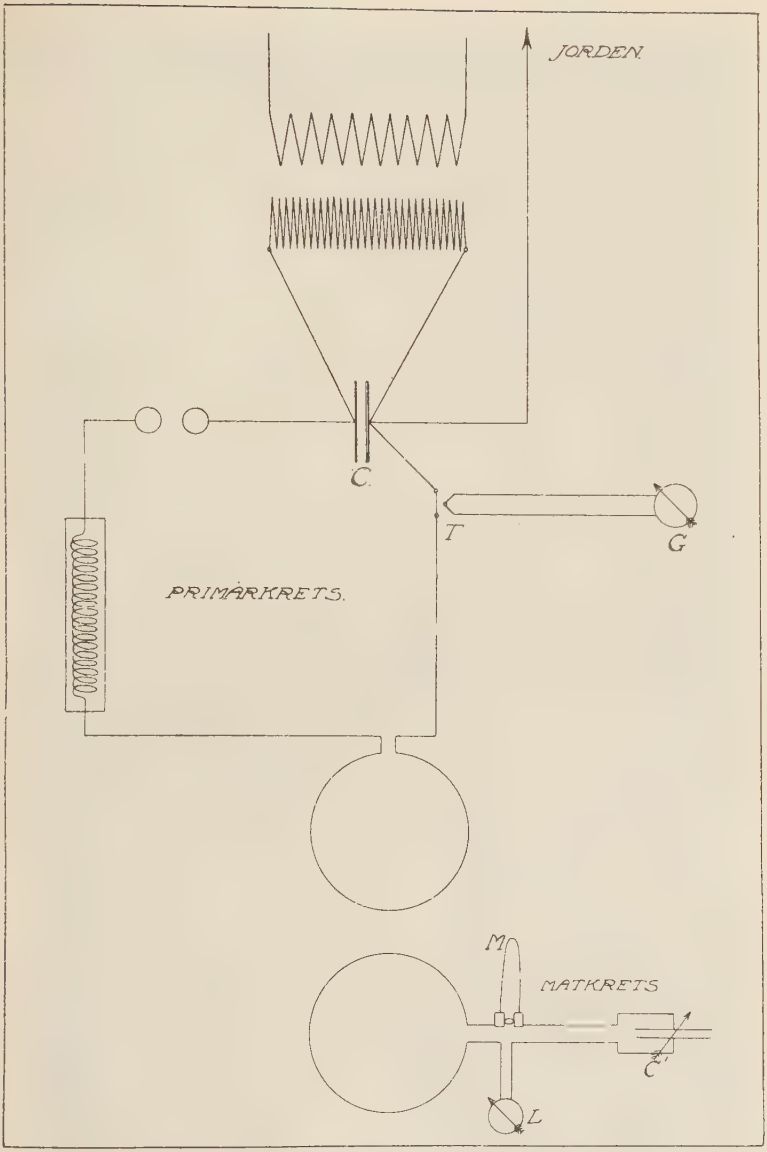


Fig. 3.
$T$ = termoelement; $G$ = galvanometer; $M$ = tillsatsmotstånd;
$L$ = elektrisk lufttermometer; $C$ = kondensator;
$C'$ = variabel kondensator.

rullen var kopplad till beläggningarna på en kondensator, vars storlek emellertid ej behövde vara så avpassad, att resonans uppträdde i den sekundära ledningen.

Parallellt med kondensatorn var själva svängningskretsen kopplad. Denna innehöll, såsom framgår av fig. 3, utom den solenoid, som skulle undersökas, och en annan självinduktionsrulle, en gniststräcka, vars ena kula var kopplad direkt på kondensatorn. Kulorna, som voro av zink och hade ungefär 2 cm:s diameter, voro fästade i en gnistmikrometer, så att gnistlängden kunde varieras efter behag. För att få regelbunda urladdningar var det nödvändigt, att kulornas ytor voro jämna, varför en frisk del av ytan användes vid varje bestämning. För att göra urladdningarna regelbundnare inkopplade jag mellan induktoriet och kondensatorn ett elektrolytiskt motstånd. Detta bestod av ett långt, smalt, flera gånger omböjt glasrör fyllt med ytterst utspädd kopparsulfatlösning.

Goda urladdningar erhöllos ej blott vid en bestämd kapacitet. Denna kunde tvärtom varieras inom vida gränser. De använda kondensatorerna voro laddflaskor av glas med stanniolbeläggningar, och den önskade kapaciteten erhölls genom parallell- eller seriekoppling av flera sådana kondensatorer.

I och för mätning av strömeffekten var, som redan förut blivit nämnt, en fin koppartråd av 0,1 mm:s diameter inkopplad i strömbanan. Ungefär halvannan millimeter från denna satt lödstället i ett termokors ($T$ i fig. 3). Detta var gjort av koppar- och konstantantrådar av 0,05 mm:s tjocklek. Mättråden och termoelementet voro inneslutna i en liten pappask och med vadd väl skyddade mot temperaturväxlingar i omgivningen. Termoelementet var direkt kopplad till en galvanometer av Deprez-d'Arsonval's typ.

Mättråden var direkt kopplad på kondensatorn. Galvanometern påverkades mycket av statiska laddningar i termoelement och mättråd. För att få bort dessa störningar blev

Fig. 1

det nödvändigt att jordförbinda den med mättråden förbundna beläggningen på kondensatorn genom effektiv jordledning. Detta åstadkoms genom en grov koppartråd, som fastlöddes vid en åskledare. Denna jordledning fungerade utmärkt, och efter dess anbringande kunde inga statiska störningar iakttagas.

Som galvanometern stod ganska nära svängningskretsarna, kunde jag ej helt och hållet kompensera dessas direkta verkan på galvanometern. Emellertid gjordes för varje särskild be-

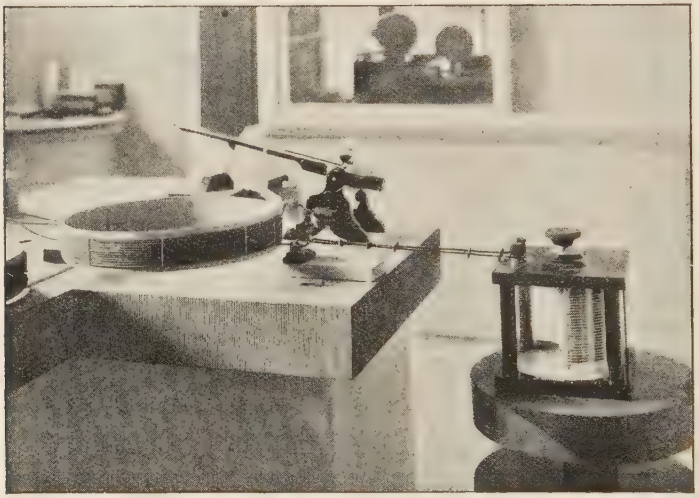

Fig. 5.

stämning en mätning av storleken på denna direkta verkan, och korrektion härför gjordes. Denna korrektion var emellertid liten och utgjorde endast några tiondelar av en skaldel.

Som redan blivit nämnt, gjordes observationerna genom ett fönster från ett särskilt observationsrum. Galvanometerutslagen observerades med kikare och skala. Manometerutslagen iakttogos likaledes genom en kikare, som genom en skruv kunde vridas i horisontell led, varigenom man med kikarens trådkors kunde följa den stigande vätskepelaren med

stor noggrannhet. Fig. 4 visar en fotografi av svängningskretsen.

**Resonanskretsen**. (Se fig. 5). Svängningskretsens frekvens och dämpning bestämdes på vanligt sätt med en resonanskrets. Denna bestod av korta enlagiga självinduktionsrullar och en vridbar luftkondensator. För att mäta strömeffekten användes en elektrisk lufttermometer enligt Riess. Som tillsatsmotstånd användes en 0,1 mm tjock manganintråd, som kunde kortslutas med en konisk mässingkontakt. Trådens motstånd är tack vare dess ringa ledningsförmåga konstant = likströmsmotståndet även vid höga frekvenser.

För att undvika virvelströmmar i kondensatorn ställdes denna på något avstånd från självinduktionsrullen. Tilledningen till kondensatorn bestod av två parallella, 34 cm långa trådar på 1 cm:s avstånd från varandra. Trådarnas diameter var 0,18 cm. Tilledningstrådarna till lufttermometern voro 25 cm långa, 0,15 cm i diameter och deras inbördes avstånd 1,3 cm. Den sammanlagda självinduktionen i dessa ledningar har jag beräknat till 620 cm.

De i mätkretsen använda självinduktionsrullarna voro lindade på papp med oförtennt, luftisolerad koppartråd. Deras självinduktion är beräknad enligt Strasser.[1] Deras konstanter framgå ur nedanstående tabell 1. Vid en bestämning använ-

*Tabell 1.*

| Rullens nummer | Rullens diam. | Trådens diam. | Isoleringens diam. | Varvantal | Rullens längd | $L$ enligt Strasser |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22,3 cm | 0,179 | 0,365 | 5 | 1,50 cm | 11360 cm |
| 2 | 25,6 „ | 0,179 | 0,365 | 10 | 3,40 „ | 44500 „ |
| 3 | 35,7 „ | 0,179 | 0,365 | 12 | 4,02 „ | 94400 „ |
| 4 | 36.5 „ | 0,179 | 0,365 | 20 | 7,20 „ | 208300 „ |

[1] Strasser: Ann. d. Ph. (4) 17. p. 763. 1905.

des en större rulle med många lager tråd, och dennas självinduktion bestämdes experimentellt med WIEN's brygganordning till $1{,}80 \cdot 10^6$ cm.

Den i mätkretsen använda elektriska lufttermometerns utslag voro icke fullt proportionella mot strömstyrkans kvadrat. Instrumentet var därför ej lämpligt till noggranna dämpningsmätningar. Som jag emellertid icke avsett några sådana utan endast att erhålla ett mått på dämpningsdekrementets storleksordning, ansåg jag mig kunna använda detsamma. Som mått på inträdande resonans gav det tillräckligt noggranna utslag. Vid resonansförsöken användes lösast möjliga koppling. Ett par av resonanskurvorna visa emellertid vid toppen en svag insnörning. Emellertid äro dessa ojämnheter i resonanskurvan så små, att deras inverkan vid beräkningen av svängningstalet icke är av någon betydelse, och dämpningsdekrementen har jag, som nämnt, aldrig avsett att bestämma med någon noggrannhet.

**Observationer**: För att bestämma effektiva motståndet i en solenoid skulle jag, som av det föregående är tydligt, mäta förhållandet mellan de under samma tid i solenoiden utvecklade värmemängderna vid likström och växelström, vars effektiva värde var lika med likströmmens.

Sedan strömmen slutits, dröjde det emellertid ganska länge, ungefär tre kvarts timme, innan värmejämvikt inträdde. Som man under en så lång tid måste riskera betydliga nollpunktsförflyttningar på grund av temperaturändringar i rummet, blev det nödvändigt att bestämma manometerutslagen efter viss bestämd tid oberoende av, att värmejämvikt ej inträtt.

Själva observationerna utfördes därför på följande sätt. Sedan strömbanan slutits på bestämt klockslag, följdes manometerpelarens rörelse med den vridbara kikarens trådkors.

Precis var trettionde sekund avlästes manometern och galvanometern, som angav strömeffekten. Tiden bestämdes tidtals med kronometer, tidtals med ett elektriskt drivet sekundur. Båda angåvo vid sin gång med markerad tydlighet varje halv sekund. Tiden kunde således följas genom att räkna slagen, under det ögat följde manometerpelarens rörelse. På detta sätt kunde manometerutslagen bestämmas med en noggrannhet av 0,1 mm. Vätskepelarens menisk var mycket skarpt begränsad och tillät noggrann inställning. Vid likströmsserierna bestämdes dessutom strömstyrkan med precisions-ampère-meter från Siemens och Halske. Varje serie omfattade sex avläsningar och tog alltså en tid av tre minuter.

Först gjordes tre sådana serier med likström av olika styrka. I ett diagram, ritat på millimeterpapper, avsattes därefter strömstyrkornas kvardrater som abskissor och manometerutslagen som ordinator. Genom att sammanbinda dessa punkter erhöllos sex räta linier, var och en representerande sambandet mellan strömstyrkans kvadrat och manometerutslagen efter bestämd tid, från och med en halv till och med tre minuter. I samma diagram inritades också galvanometerutslagen för olika strömstyrkor. (Se fig. 14, 16 och 18.)

I och för varje bestämning gjordes sedan 3 växelströmserier. Vid dessa var strömeffekten ej fullt konstant utan steg tämligen kontinuerligt under serien.

Som mått på strömeffekten under en viss del av serien togs därför medelvärdet mellan de gjorda galvanometeravläsningarna. Galvanometerutslaget efter två minuter blev således ett medeltal av fyra avläsningar. Utslaget efter tre minuter var medeltalet av de sex gjorda avläsningarna.

För att få motståndet togs sedan förhållandet mellan manometerutslagen vid växelström och manometerutslagen vid likström för samma galvanometerutslag och motsvarande tid. De senare avlästes naturligtvis på likströmsdiagrammen. På

detta sätt erhöllos ur varje serie sex värden, och som jag för varje bestämning gjort tre serier, är varje motståndsmätning ett medeltal av aderton värden, utom i de sällsynta fall, då jag nödgats avbryta växelströmmen, innan alla sex observationerna medhunnits. Dessa förhållanden mellan manometerutslagen vid växelström och likström skulle sedan, enligt ekv. (50) sid. 29 multipliceras med förhållandet $w' : w_0$ mellan mättrådens motstånd vid växel- och likström. Detta förhållande beräknades enligt den för små argument gällande formeln för skineffekt (se (2)), varvid endast den första korrektionstermen medtagits.

Formeln gäller så länge $x < 0{,}65$. Beräkningen verkställdes för fyra olika frekvenser (se nedanstående tabell 2), och med deras hjälp uppritades en hjälpkurva, ur vilken $w' : w_0$ kunde avläsas för varje godtycklig frekvens.

*Tabell 2.*

| $n$ | $x$ | $\frac{w'}{w_0}$ |
|---|---|---|
| $5 . 10^5$ | 0,271 | 1,0018 |
| $10^6$ | 0,381 | 1,0071 |
| $1{,}5 . 10^6$ | 0,467 | 1,0159 |
| $2 . 10^6$ | 0,527 | 1,0283 |

Som själva originalobservationerna omfatta ett mycket stort siffermaterial, har jag ej kunnat publicera dem. För att emellertid ge en inblick i hur de te sig, har jag i slutet på arbetet infört några fullständiga observationsserier. Till ett par av dessa meddelas även resonansbestämningar och kurvor för manometerutslagen vid likström.

I nedanstående tabell 3 äro de olika observationsresultaten sammanställda. Till de därstädes meddelade uppgifterna vill jag tillfoga följande:

*Tabell 3.*

| Solenoidens nummer | Solenoidens längd cm | Antal varv | $g$ cm | $r$ cm | $\frac{2r}{g}$ | $\varkappa . 10^5$ 12°,5 C. | $n$ | $V\bar{n}$ | $\alpha$ | $\frac{\eta'}{\eta}$ | $\frac{W'}{W_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26,69 | 226 | 0,118 | 0,0240 | 0,407 | 57,3 | 1200000 | 1096 | 14,05 | 3,25 | 3,28 |
| 2 | 24,8 | 163 | 0,152 | 0,0348 | 0,458 | 57,3 | 85390 | 292,2 | 5,45 | 1,45 | 1,45 |
| 2 | 24,8 | 163 | 0,152 | 0,0348 | 0,458 | 57,3 | 325700 | 570,7 | 10,7 | 2,55 | 2,55 |
| 2 | 24,8 | 163 | 0,152 | 0,0348 | 0,458 | 57,3 | 529900 | 727,9 | 13,6 | 3,31 | 3,32 |
| 2 | 24,8 | 163 | 0,152 | 0,0348 | 0,458 | 57,3 | 756500 | 869,8 | 16,2 | 4,05 | 4,07 |
| 2 | 24,8 | 163 | 0,152 | 0,0348 | 0,458 | 57,3 | 998800 | 999,4 | 18,6 | 4,84 | 4,87 |
| 2 | 24,8 | 163 | 0,152 | 0,0348 | 0,458 | 57,3 | 1413000 | 1189 | 22,2 | 5,64 | 5,72 |
| 3 | 24,8 | 195 | 0,127 | 0,0348 | 0,551 | 57,3 | 628500 | 792,8 | 14,8 | 4,24 | 4,27 |
| 3 | 24,8 | 195 | 0,127 | 0,0348 | 0,551 | 57,3 | 909700 | 953,8 | 17,8 | 5,30 | 5,33 |
| 4 | 24,6 | 117 | 0,210 | 0,0348 | 0,331 | 57,3 | 693400 | 832,7 | 15,4 | 3,27 | 3,28 |
| 4 | 24,6 | 117 | 0,210 | 0,0348 | 0,331 | 57,3 | 986200 | 993,1 | 18,4 | 3,79 | 3,82 |
| 4 | 24,6 | 117 | 0,210 | 0,0348 | 0,331 | 57,3 | 1689000 | 1300 | 24,2 | 5,08 | 5,17 |
| 5 | 24,5 | 78 | 0,314 | 0,0348 | 0,221 | 57,3 | 669900 | 818,4 | 15,2 | 2,62 | 2,63 |
| 5 | 24,5 | 78 | 0,314 | 0,0348 | 0,221 | 57,3 | 973200 | 986,5 | 18,4 | 3,27 | 3,29 |
| 5 | 24,5 | 78 | 0,314 | 0,0348 | 0,221 | 57,3 | 1504000 | 1226 | 22,8 | 3,93 | 3,99 |
| 5 | 24,5 | 78 | 0,314 | 0,0348 | 0,221 | 57,3 | 2000000 | 1414 | 26,3 | 4,38 | 4,50 |
| 6 | 24,6 | 146 | 0,168 | 0,0348 | 0,414 | 57,3 | 746900 | 864,2 | 16,1 | 3,93 | 3,94 |
| 7 | 24,6 | 59 | 0,417 | 0,0348 | 0,167 | 57,3 | 1238000 | 1113 | 20,6 | 3,42 | 3,46 |
| 7 | 24,6 | 59 | 0,417 | 0,0348 | 0,167 | 57,3 | 1738000 | 1318 | 24,5 | 3,92 | 4,00 |
| 7 | 24,6 | 59 | 0,417 | 0,0348 | 0,167 | 57,3 | 303000 | 550,5 | 10,2 | 1,76 | 1,76 |
| 7 | 24,6 | 59 | 0,417 | 0,0348 | 0,167 | 57,3 | 554900 | 744,9 | 13,8 | 2,31 | 2,31 |
| 7 | 24,6 | 59 | 0,417 | 0,0348 | 0,167 | 57,3 | 2364000 | 1537 | 28,7 | 4,48 | 4,66 |
| 8 | 24,5 | 44 | 0,557 | 0,0348 | 0,125 | 57,3 | 305300 | 552,6 | 10,3 | 1,60 | 1,60 |
| 8 | 24,5 | 44 | 0,557 | 0,0348 | 0,125 | 57,3 | 571000 | 755,8 | 14,1 | 2,21 | 2,21 |
| 8 | 24,5 | 44 | 0,557 | 0,0348 | 0,125 | 57,3 | 1320000 | 1149 | 21,4 | 3,24 | 3,28 |
| 8 | 24,5 | 44 | 0,557 | 0,0348 | 0,125 | 57,3 | 1790000 | 1333 | 24,8 | 3,68 | 3,76 |
| 9 | 24,74 | 205 | 0,121 | 0,0400 | 0,661 | 58,9 | 107600 | 328,1 | 7,08 | 2,40 | 2,40 |
| 9 | 24,74 | 205 | 0,121 | 0,0400 | 0,661 | 58,9 | 313200 | 559,6 | 12,1 | 3,95 | 3,95 |
| 9 | 24,74 | 205 | 0,121 | 0,0400 | 0,661 | 58,9 | 524000 | 723,9 | 15,7 | 5,33 | 5,34 |
| 9 | 24,74 | 205 | 0,121 | 0,0400 | 0,661 | 58,9 | 790400 | 889 | 19,4 | 6,57 | 6,59 |
| 9 | 24,74 | 205 | 0,121 | 0,0400 | 0,661 | 58,9 | 1136000 | 1066 | 23,0 | 7,50 | 7,57 |
| 10 | 24,76 | 117 | 0,212 | 0,0400 | 0,377 | 58,9 | 203000 | 451 | 9,8 | 2,16 | 2,16 |

| Solenoidens nummer | Solenoidens längd cm | Antal varv | $g$ cm | $r$ cm | $\frac{2r}{g}$ | $\sigma \cdot 10^5$ 12°,5 C. | $n$ | $\sqrt{n}$ | $\alpha$ | $\frac{\eta_1'}{\eta_1}$ | $\frac{W'}{W_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 24,76 | 117 | 0,212 | 0,0400 | 0,377 | 58,9 | 381200 | 617,4 | 13,4 | 3,08 | 3,08 |
| 10 | 24,76 | 117 | 0,212 | 0,0400 | 0,377 | 58,9 | 645400 | 803,4 | 17,4 | 3,94 | 3,95 |
| 10 | 24,76 | 117 | 0,212 | 0,0400 | 0,377 | 58,9 | 873900 | 934,8 | 20,2 | 4,48 | 4,51 |
| 10 | 24,76 | 117 | 0,212 | 0,0400 | 0,377 | 58,9 | 1606000 | 1267 | 27,5 | 6,03 | 6,14 |
| 11 | 24,95 | 89 | 0,280 | 0,0400 | 0,285 | 59,9 | 518500 | 720 | 15,6 | 2,99 | 3,0 |
| 11 | 24,95 | 89 | 0,280 | 0,0400 | 0,285 | 58,9 | 881300 | 938,7 | 20,3 | 3,89 | 3,91 |
| 11 | 24,95 | 89 | 0,280 | 0,0400 | 0,285 | 58,9 | 1508000 | 1228 | 26,6 | 4,91 | 4,99 |
| 12 | 24,35 | 49 | 0,497 | 0,0400 | 0,161 | 58,9 | 520300 | 721,3 | 15,6 | 2,39 | 2,39 |
| 12 | 24,35 | 49 | 0,497 | 0,0400 | 0,161 | 58,9 | 910500 | 954,2 | 20,7 | 3,16 | 3,18 |
| 12 | 24,35 | 49 | 0,497 | 0,0400 | 0,161 | 58,9 | 1508000 | 1228 | 26,5 | 3,98 | 4,04 |
| | | | | | | 16° C. | | | | | |
| 13 | 24,77 | 147 | 0,168 | 0,0452 | 0,538 | 58,7 | 371200 | 609,2 | 14,9 | 4,30 | 4,31 |
| 14 | 24,78 | 274 | 0,0904 | 0,0245 | 0,542 | 58,7 | 372500 | 610,3 | 8,1 | 2,33 | 2,33 |
| 14 | 24,78 | 274 | 0,0904 | 0,0245 | 0,542 | 58,7 | 821500 | 906,4 | 12,0 | 3,44 | 3,45 |
| 15 | 24,80 | 206 | 0,120 | 0,0335 | 0,558 | 58,7 | 370100 | 608,4 | 11,0 | 3,35 | 3,35 |
| 15 | 24,80 | 206 | 0,120 | 0,0335 | 0,558 | 58,7 | 825900 | 908,8 | 16,4 | 4,74 | 4,76 |
| 16 | 24,70 | 244 | 0,101 | 0,0282 | 0,558 | 58,7 | 371200 | 609,2 | 9,3 | 2,76 | 2,76 |
| 16 | 24,70 | 244 | 0,101 | 0,0282 | 0,558 | 58,7 | 823700 | 907,6 | 13,8 | 4,05 | 3,07 |
| | | | | | | 12°,5 C. | | | | | |
| 17 | 24,69 | 157 | 0,157 | 0,0248 | 0,316 | 58,6 | 963300 | 981,5 | 13,2 | 2,75 | 2,77 |
| 17 | 24,69 | 157 | 0,157 | 0,0248 | 0,316 | 58,6 | 1100000 | 1049 | 14,1 | 2,91 | 2,93 |
| 18 | 24,7 | 176 | 0,140 | 0,0248 | 0,354 | 58,6 | 910500 | 954,2 | 12,8 | 2,85 | 2,87 |
| 18 | 24,7 | 176 | 0,140 | 0,0248 | 0,354 | 58,6 | 1071000 | 1035 | 13,9 | 2,80 | 2,82 |
| 19 | 24,85 | 99 | 0,251 | 0,0455 | 0,362 | 58,6 | 1039000 | 1019 | 25,0 | 4,55 | 4,58 |
| 20 | 24,56 | 98 | 0,251 | 0,0400 | 0,319 | 58,6 | 1015000 | 1007 | 21,7 | 3,91 | 3,94 |
| 21 | 24,75 | 80 | 0,309 | 0,0492 | 0,320 | 58,6 | 1004000 | 1002 | 26,6 | 4,70 | 4,73 |

Solenoiden n:o 1 var lindad på ett glasrör med radien = 0,885 cm. N:o 2 t. o. m. n:o 12 samt n:o 17 t. o. 21 hade en radie 0,965 cm och n:o 13 t. o. m. n:o 16 en radie av 1,07 cm.

Dämpningen har varit ganska stor, dekrementet har som regel varit ungefär 0,2 eller något mindre. Jag har emeller-

tid ej meddelat dekrementen för varje särskild mätning, emedan andra siffran varit mycket osäker. I allmänhet torde noggrannheten varit än sämre än vid de i slutet av avhandlingen medtagna mätningarna.

Temperaturen vid mätningarna har i allmänhet legat mellan 12° och 13° C. Som medeltemperatur har jag antagit 12°,5, utom för solenoiderna n:o 13—16, vilka mättes vid en temperatur av 16°.

Serier på olika material äro skilda genom linjer.

## Jämförelse med andras resultat.

Battelli: Battelli's ekvation för effektivmotståndet i en lång solenoid återfinnes i ekv. (16). För att jämföra mina mätningar med denna ekvation utbyter jag perioden mot svängningstalet, bortser från permeabiliteten och dividerar ekvationen med $W_0 = \frac{l}{\sigma \pi r^2}$. Ekvationen (16) övergår då till:

$$\frac{W'}{W_0} = 2\sqrt{2}\,\pi\beta r\sqrt{n^3\sigma^3} \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

Som $\beta$ är en obestämd konstant, kan (51) ej användas till numerisk beräkning av $W' : W_0$. Man ser emellertid, att för en bestämd solenoid bör $\frac{W'}{W_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ vara konstant. I tabell 4 har jag gjort en sammanställning av värdet på $\frac{W'}{W_0}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ vid olika frekvenser för tre av mig undersökta solenoider. Som man finner, är detta uttryck långt ifrån konstant; dess värde avtar i stället vid stigande frekvens mycket starkt. Vid solenoid n:o 2 är det t. ex. 17 gånger så stort vid $n = 85400$ som vid $n = 1413000$. Denna brist på överensstämmelse med Battelli's teori framträder även på ett expressivt sätt, om man uppritar kurvor med $W' : W_0$ och $\sqrt{n^3}$ som koordinater. Dessa kurvor borde ju enligt (51) bli räta linier. I fig. 6 synes deras verk-

liga form. Battelli's teori visar således ingen överensstämmelse med de gjorda mätningarna.

*Tabell 4.*

| Solenoid n:o 2 | | | Solenoid n:o 8 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{W'}{W_0}$ | $\sqrt{n^3}$ | $\frac{W'}{W_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ | $\frac{W'}{W_0}$ | $\sqrt{n^3}$ | $\frac{W'}{W_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ |
| 1,45 | 24,9 . $10^6$ | 5,81 . $10^{-8}$ | 1,60 | 169 . $10^6$ | 0,948 . $10^{-8}$ |
| 2,55 | 186 . » | 1,37 . » | 2,21 | 431 . » | 0,512 . » |
| 3,32 | 387 . » | 0,857 . » | 3,28 | 1520 . » | 0,216 . » |
| 4,07 | 658 . » | 0,619 . » | 3,76 | 2390 . » | 0,157 . » |
| 4,87 | 998 . » | 0,488 . » | | | |
| 5,72 | 1680 . » | 0,341 . » | | | |

| Solenoid n:o 10 | | |
|---|---|---|
| $\frac{W'}{W_0}$ | $\sqrt{n^3}$ | $\frac{W'}{W_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ |
| 2,16 | 91,5 . $10^6$ | 2,36 . $10^{-8}$ |
| 3,08 | 235 . » | 1,31 . » |
| 3,95 | 518 . » | 0,762 . » |
| 4,51 | 817 . » | 0,552 . » |
| 6,14 | 2040 . » | 0,302 . » |

Picciati: I motsats till Battelli fann Picciati liksom redan förut Sommerfeldt, att förhållandet $W' : W_0$ är proportionellt mot $\sqrt{n}$. Emedan Picciati bortsett från gänghöjdens inflytande, skall jag ej göra någon jämförelse mellan mina mätningar och de ur hans formel beräknade värdena utan endast pröva motståndets beroende av frekvensen. I diagrammen på fig. 7 har jag infört de vid olika frekvenser gjorda mätningarna för solenoiderna n:o 2—5, 7, 8 och på fig. 8 för solenoiderna

n:o 9—12. Här äro $W' : W_0$ satta som ordinator och $\sqrt{n}$ som abskissor. I de serier, som tagits vid vitt skilda frekvenser, finner man full proportionalitet mellan $W' : W_0$ och $\sqrt{n}$. Jämför särskilt serierna för solenoiderna 2, 7, 8, 9 och 10.

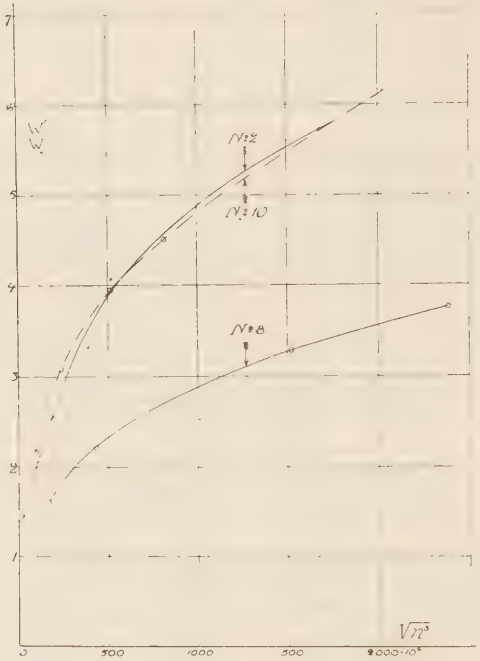


Fig. 6.

Cohen: Denne utgår vid sina beräkningar från den förutsättningen, att solenoidtrådens tvärsnitt är kvadratiskt. Hans formler äro därför icke tillämpliga på mina solenoider av cylindrisk tråd. Emellertid ha Esau och Lenz visat, att Cohen's formler ge mycket lägre värden än den Sommerfeldt-Lenzska, och denna differens blir allt större, då gänghöjden ökar.

Esau: För att kunna använda Picciati's formel även vid stigande gänghöjder multiplicerade Esau Picciati's uttryck med $\sqrt{\frac{2r}{g}}$. Formeln (21) får därför detta utseende:

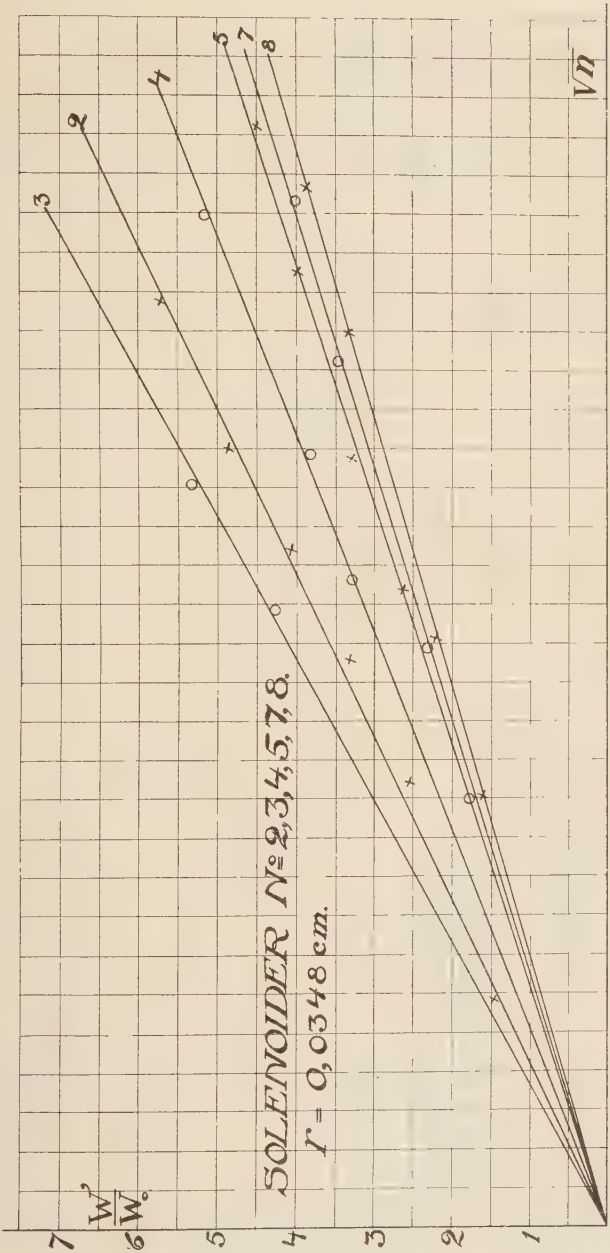
SOLENOIDER N:o 2,3,4,5,7,8.
r = 0,0348 cm.
W'/W°
√n
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1
2
3
4
5
6
7
2
3
4
5
7
8

Fig. 7.

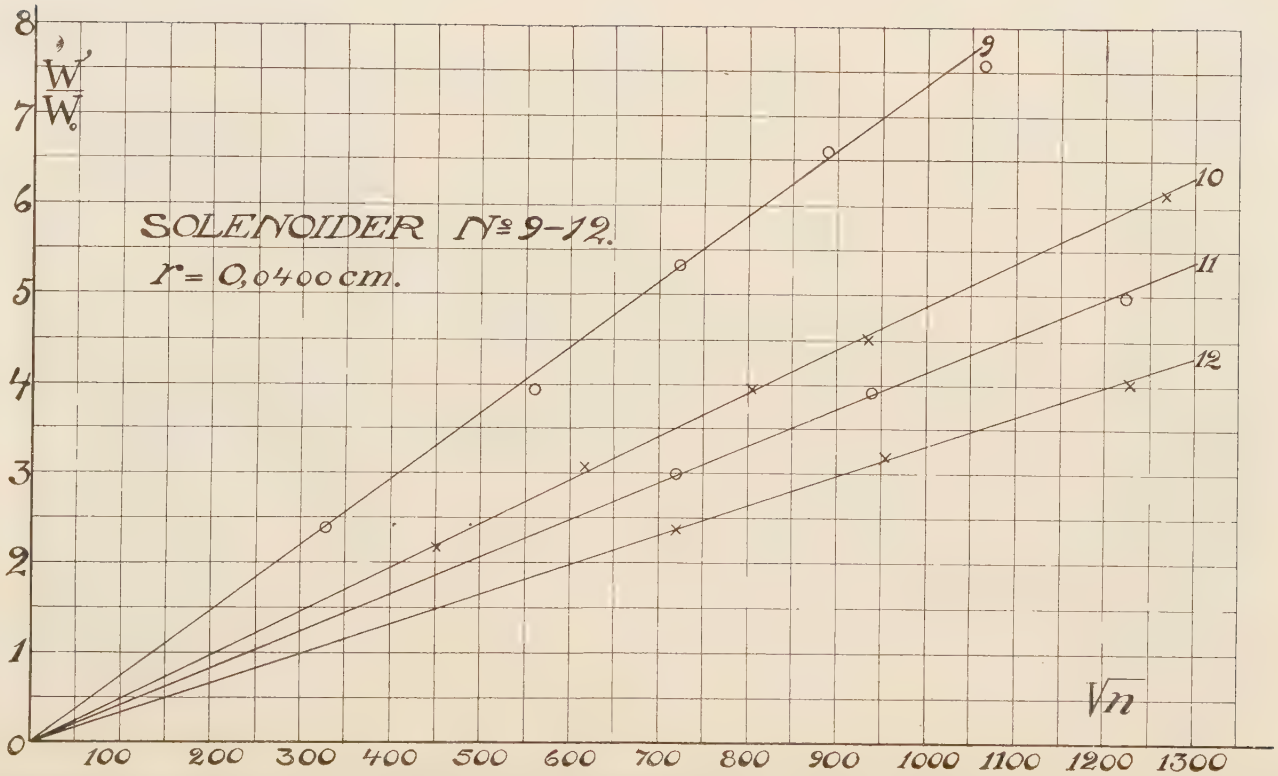
W'/W₀
SOLENOIDER Nº 9–12.
r = 0,0400 cm.
9
10
11
12
√n
0
1
2
3
4
5
6
7
8
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300

Fig. 8.

$$\frac{W'}{W_0} = 2{,}467\, r \sqrt{\frac{2\,r}{g}} \sqrt{\frac{\pi\,\omega\,\sigma}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

I nedanstående tabell 5 lämnas en jämförelse mellan mina mätningar och de ur (52) beräknade värdena på $W' : W_0$ vid en frekvens av $10^6$.

*Tabell 5.*

| $r = 0{,}0348$ cm | | | | | | $r = 0{,}0400$ cm | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Solenoid | $g$ | $\frac{2\,r}{g}$ | $\frac{W'}{W_0}$ ber. | $\frac{W'}{W_0}$ exp. | Relativ avvikning | Solenoid | $g$ | $\frac{2\,r}{g}$ | $\frac{W'}{W_0}$ ber. | $\frac{W'}{W_0}$ exp. | Relativ avvikning |
| 8 | 0,557 | 0,125 | 2,28 | 2,89 | 21 % | 12 | 0,497 | 0,161 | 3,02 | 3,30 | 8,5 % |
| 7 | 0,417 | 0,167 | 2,63 | 3,07 | 14 % | 11 | 0,280 | 0,285 | 4,02 | 4,14 | 2,9 % |
| 5 | 0,314 | 0,221 | 3,04 | 3,24 | 6,2 % | 10 | 0,212 | 0,377 | 4,62 | 4,86 | 5,4 % |
| 4 | 0,210 | 0,331 | 3,71 | 3,93 | 5,6 % | 9 | 0,121 | 0,661 | 6,12 | 7,37 | 17 % |
| 2 | 0,152 | 0,458 | 4,37 | 4,79 | 8,8 % | | | | | | |
| 3 | 0,127 | 0,551 | 4,79 | 5,49 | 18 % | | | | | | |

De såsom experimentella angivna värdena äro avlästa på fig. 7 och 8. Den relativa avvikelsen når i båda serierna ett minimivärde vid en gänghöjd, som är tre à fyra gånger trådens tjocklek. Avvikelsen är här tämligen liten, men blir mycket stor vid såväl större som mindre gänghöjder. Anmärkningsvärt är, att avvikelserna äro avgjort mindre vid den tjockare tråden än vid den tunnare. Esau meddelar själv en jämförelse med mätningar av Black. Denne har använt mycket grövre tråd än jag, och här ligga de observerade värdena lägre än de beräknade, vilket kan tyda på, att formeln skulle ge riktiga värden för en bestämd trådtjocklek och bestämd gänghöjd. Emellertid ha mina mätningar givit relativt högre värden än Black's, en sak, vartill jag senare skall återkomma. Det är därför sannolikt, att avvikelserna mellan (52) och mina

mätningar skulle gått i samma riktning som förut, om jag företagit mätningar med trådar av samma diameter som Black's.

Ur de mätningar Esau utfört, uppritade han ett diagram med $W' : W_0$ som ordinator och $\alpha = 2d\sqrt{\frac{d}{g}}\sqrt{2\pi\omega\sigma}$ som abskissor. Han fann då, att för solenoider av samma tråd men olika gänghöjd täckte kurvorna varandra, som formlerna fordrade, så länge förhållandet $\frac{\text{gänghöjd}}{\text{trådens tjocklek}}$ är mindre än 3,

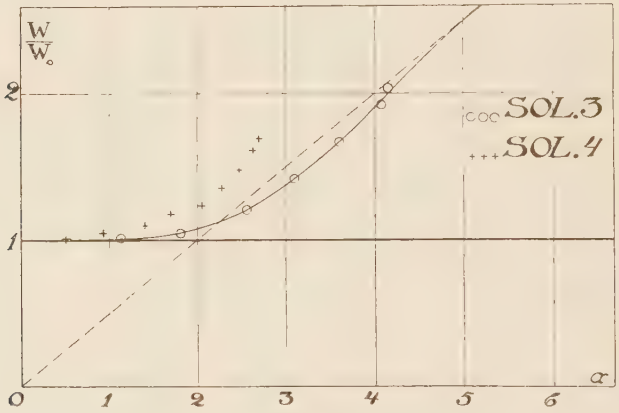


Fig. 9.

men om gänghöjden blir än större, kommer kurvan att ligga högre. I fig. 9 återger jag Esau's diagram. Tråden var här kvadratisk med 0,3 cm:s sida. I solenoid 3 var gänghöjden 0,8 cm och i solenoid 4 var den 1,86 cm. Detta resultat tolkar Esau på ett egendomligt sätt. I sammanfattningen av sina resultat säger han nämligen: "För gänghöjder $g > 6\,r$ växer förhållandet $W' : W_0$ såväl vid kvadratiskt som även vid cirkulärt trådtvärsnitt vid växande gänghöjd i stället för att avtaga". I verkligheten visar det naturligtvis endast, att vid så stora gänghöjder gäller ej Esau's antagande av rätlinigt fält i solenoiden (jfr sid. 16). Den av Esau omräknade Sommer-

FELDTSKA formeln ger därför för låga värden. Att icke effektivmotståndet växer, när gänghöjden ökas över den av ESAU angivna gränsen, synes tydligt av fig. 10. Där äro $W' : W_0$ ordinator och $2r : g$ abskissor, och kurvor för två trådtjocklekar äro införda. Frekvensen är $10^6$. Den största gänghöjden är här 8, och den minsta är 1,5 gånger trådens tjocklek. $W' : W_0$ minskar hela tiden vid växande gänghöjd.

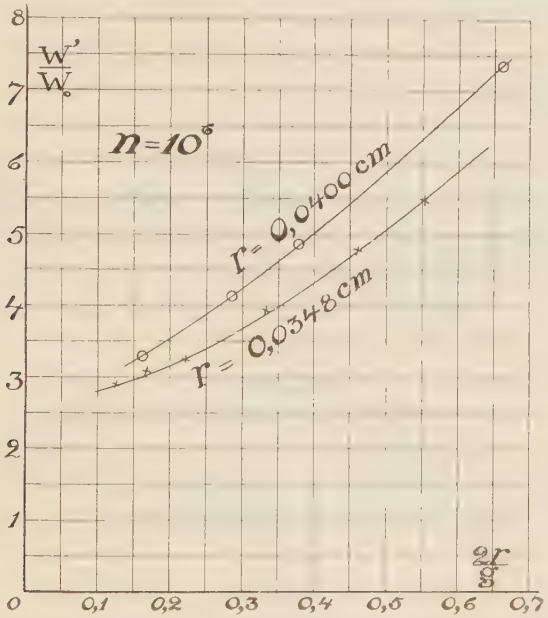


Fig. 10.

NICHOLSON: Om NICHOLSON's ekv. (38) sid. 19 divideras med likströmsmotståndet för längdenhet av tråd $W_0 = \frac{1}{\sigma \pi r^2}$ erhålles:

$$\frac{W'}{W_0} = \pi \cdot r \sqrt{n\sigma} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{1}{16 \pi^2 r^2 n \sigma}} + \cdots \right\}$$

$$- \frac{r^2}{32 R^2} \cos^2\gamma \, (1 - 5 \sin^2\gamma) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{1}{16 \pi^2 r^2 n \sigma}} - \cdots \right\} - \ldots \quad (53)$$

Den första termen är identisk med formeln för "skin"-effekt i rak tråd vid kondensatorsvängningar. Motståndet i en solenoid skulle således vara mindre än i samma tråd rak. Den senare termen, som innehåller motståndets beroende av gänghöjden, är för övrigt mycket liten. Trådens radie är alltid liten i förhållandet till solenoidens. $\frac{r^2}{32\,R^2}$ är således en mycket liten kvantitet, och de övriga faktorerna skilja sig endast föga från 1, emedan $\gamma$ är en liten vinkel. För ett så extremt fall, att gänghöjden är lika med solenoidradien, är $\gamma$ ungefär 9°, således $\cos^2\gamma = 0{,}975$ och $(1 - 5\sin^2\gamma) = 0{,}88$. Först vid så små frekvenser att den sista faktorn blir stor, kan den andra termen i (53) öva något inflytande. Vid de av mig använda frekvenserna utgör den högst någon hundradels procent av hela motståndet. I nedanstående tabell 6 gives ett par jämförelser mellan mina mätningar och de ur (53) beräknade värdena på $W' : W_0$.

*Tabell 6.*

| Solenoid | $n$ | $\frac{W'}{W_0}$ ber. | $\frac{W'}{W_0}$ exp. |
|---|---|---|---|
| 4 | $4{,}9 \cdot 10^5$ | 2,10 | 2,75 |
| 5 | » | » | 2,26 |
| 9 | $9 \cdot 10^5$ | 3,09 | 6,96 |
| 10 | » | » | 4,59 |
| 11 | » | » | 3,91 |
| 12 | » | » | 3,12 |

Nicholson's resultat strida mot all erfarenhet.

Sommerfeldt: Dennes gränsformel för $W' : W_0$ vid hög frekvens var av formen:

$$\frac{W'}{W_0} = r\sqrt{\frac{\pi\omega\sigma}{2}}\,\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right), \text{ där } \varphi = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{g}\right)^2 \sum_1^\infty c_\nu^2 .$$

Att $W' : W_0$ är proportionell mot $Vn$ har redan visats, (jfr sid. 47). För att pröva, om $W' : W_0$ också är proportionell mot trådradien, har jag gjort några mätningar på solenoider av olika tjock tråd, men där $2r : g$ varit så konstant som möjligt. Som solenoiderna lindats i gängsvarv, har jag naturligtvis icke kunnat få gänghöjden annat än approximativt riktig för varje särskild solenoid. Dessa mätningar ha gjorts på solenoiderna n:o 13—16 och äro införda i diagrammet fig. 11.

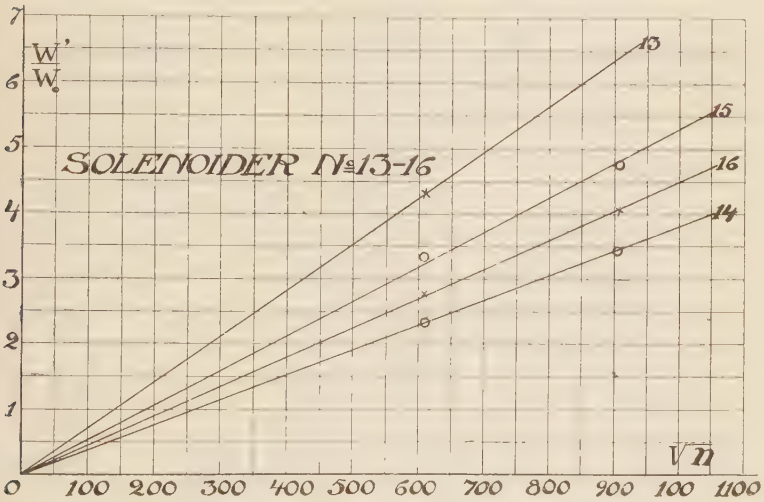


Fig. 11.

Ur detta har jag sedan avläst $W' : W_0$ för två frekvenser: $n = 3{,}6 \cdot 10^5$ och $n = 8{,}1 \cdot 10^5$. Värdet på $2r : g$ för dessa solenoider är ungefär 0,55, ehuru något olika för de olika solenoiderna. Jag har emellertid sökt korrigera de avlästa värdena på $W' : W_0$ att gälla, om $2r : g$ vore precis 0,55. Denna korrektion har utförts på följande sätt. Ur fig. 10, som ger sambandet mellan $W' : W_0$ och $2r : g$ vid konstant trådradie, finner man, att värdet på $W' : W_0$ ändras med ungefär 1,5 %, om $2r : g$ ändras med 0,01 för värden på $2r : g$, som ligga omkring 0,55. Under antagande av att denna relativa ändring hos

$W' : W_0$ är ungefär lika vid olika trådradier, och att den således kan tillämpas på mina solenoider, har jag beräknat $W' : W_0$ för $2r : g = 0{,}55$.

I tabell 7 har jag gjort en sammanställning av de så erhållna värdena. Av fig. 12, där trådradien är abskissa och $W' : W_0$ ordinata, ser man, att full proportionalitet råder mellan $W' : W_0$ och $r$, när frekvens och $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ hållas konstanta.

*Tabell 7.*

| Solenoidens nummer | $r$ | $\frac{2r}{g}$ | $n = 360000$ | | $n = 810000$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\frac{W'}{W_0}$ | $\frac{W'}{W_0}$ korr. till $\frac{2r}{g} = 0{,}550$ | $\frac{W'}{W_0}$ | $\frac{W'}{W_0}$ korr. till $\frac{2r}{g} = 0{,}550$ |
| 13 | 0,0452 | 0,538 | 4,25 | 4,32 | 6,37 | 6,47 |
| 14 | 0,0245 | 0,542 | 2,29 | 2,32 | 3,44 | 3,48 |
| 15 | 0,0335 | 0,558 | 3,19 | 3,15 | 4,78 | 4,72 |
| 16 | 0,0282 | 0,558 | 2,70 | 2,67 | 4,04 | 3,99 |

Värdena på $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ beräknades av Sommerfeldt endast för gränsfallen $\frac{2r}{g} = 0$ och $\frac{2r}{g} = 1$, och de värden på $\varphi$, som ligga mellan dessa gränser, och som Sommerfeldt anger i en tabell, har han erhållit genom interpollation med hjälp av Black's mätningar. Emellertid beräknades $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ av Lenz, och de värden, han anger, ligga avsevärt högre än de Sommerfeldt-Blackska. Differensen uppgår ända till 15 % vid $\frac{2r}{g} = 0{,}6$.

Jag har beräknat värdet på $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ för de av mig undersökta solenoiderna ur de värden på effektiva motståndet,

som jag funnit för dem. För de solenoider, som finnas representerade på fig. 7 och 8, har jag beräknat $\varphi$ ur motståndet vid $n = 10^6$. För övriga solenoider har jag använt de verk-

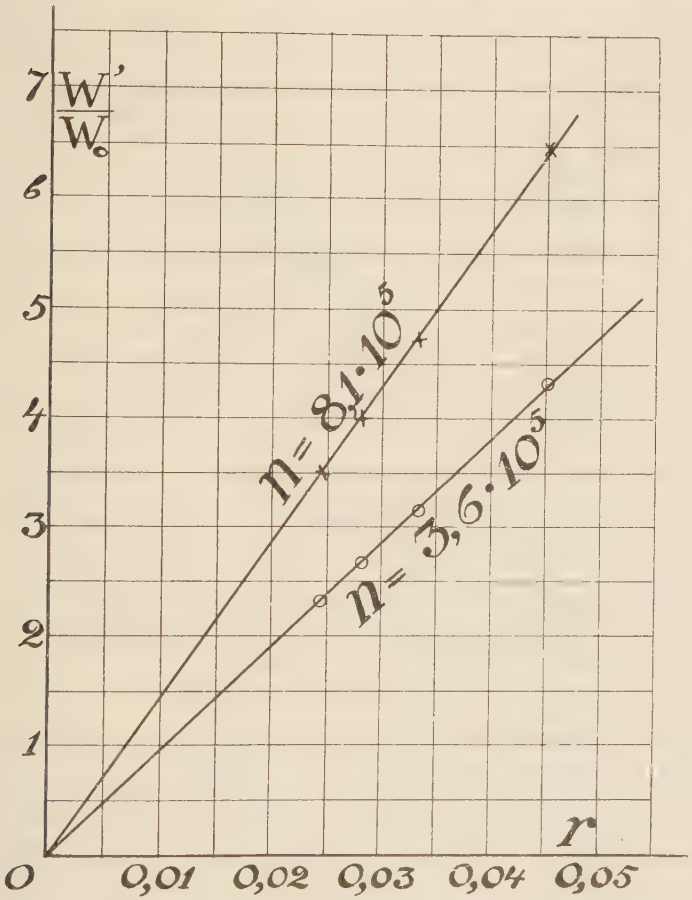


Fig. 12.

ligen utförda mätningarna. I tabell 8 gives en sammanställning av dessa värden på $\varphi$ jämförda med de för samma värden på $\frac{2r}{g}$ gällande värdena på $\varphi$ enligt Sommerfeldt-Black och enligt Lenz.

*Tabell 8.*

| Solenoidens nummer | $n$ | $\frac{2r}{g}$ | $\frac{W'}{W_0}$ | $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ exp. | $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ Sommerfeldt-Black | $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$ Lenz |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1200000 | 0,407 | 3,28 | 1,66 | 1,47 | 1,66 |
| 2 | 1000000 | 0,458 | 4,79 | 1,83 | 1,58 | 1,80 |
| 3 | 1000000 | 0,551 | 5,49 | 2,01 | 1,80 | 2,07 |
| 4 | 1000000 | 0,331 | 3,93 | 1,50 | 1,32 | 1,46 |
| 5 | 1000000 | 0,221 | 3,24 | 1,24 | 1,13 | 1,23 |
| 6 | 746900 | 0,414 | 3,94 | 1,74 | 1,48 | 1,69 |
| 7 | 1000000 | 0,167 | 3,08 | 1,18 | 1,05 | 1,14 |
| 8 | 1000000 | 0,125 | 2,89 | 1,10 | 1,02 | 1,08 |
| 9 | 1000000 | 0,661 | 7,37 | 2,42 | 2,09 | 2,44 |
| 10 | 1000000 | 0,377 | 4,86 | 1,59 | 1,41 | 1,58 |
| 11 | 1000000 | 0,285 | 4,14 | 1,36 | 1,24 | 1,35 |
| 12 | 1000000 | 0,161 | 3,30 | 1,08 | 1,05 | 1,13 |
| 13 | 371200 | 0,538 | 4,31 | 2,07 | 1,76 | 2,04 |
| 14 | 372500 | 0,542 | 2,33 | 2,05 | 1,77 | 2,05 |
| 14 | 821500 | 0,542 | 3,45 | 2,04 | 1,77 | 2,05 |
| 15 | 370100 | 0,558 | 3,35 | 2,16 | 1,81 | 2,09 |
| 15 | 825900 | 0,558 | 4,76 | 2,05 | 1,81 | 2,09 |
| 16 | 371200 | 0,558 | 2,76 | 2,11 | 1,81 | 2,09 |
| 16 | 823700 | 0,558 | 4,07 | 2,09 | 1,81 | 2,09 |
| 17 | 963300 | 0,316 | 2,77 | 1,50 | 1,30 | 1,43 |
| 17 | 1100000 | 0,316 | 2,93 | 1,48 | 1,30 | 1,43 |
| 18 | 910500 | 0,354 | 2,87 | 1,60 | 1,36 | 1,52 |
| 18 | 1071000 | 0,354 | 2,82 | 1,44 | 1,36 | 1,52 |
| 19 | 1039000 | 0,362 | 4,58 | 1,30 | 1,38 | 1,54 |
| 20 | 1015000 | 0,319 | 3,94 | 1,29 | 1,30 | 1,42 |
| 21 | 1004000 | 0,320 | 4,73 | 1,26 | 1,30 | 1,42 |

De ur mina mätningar beräknade värdena på $\varphi$ överensstämma, som man finner, nära med de Lenzska värdena.

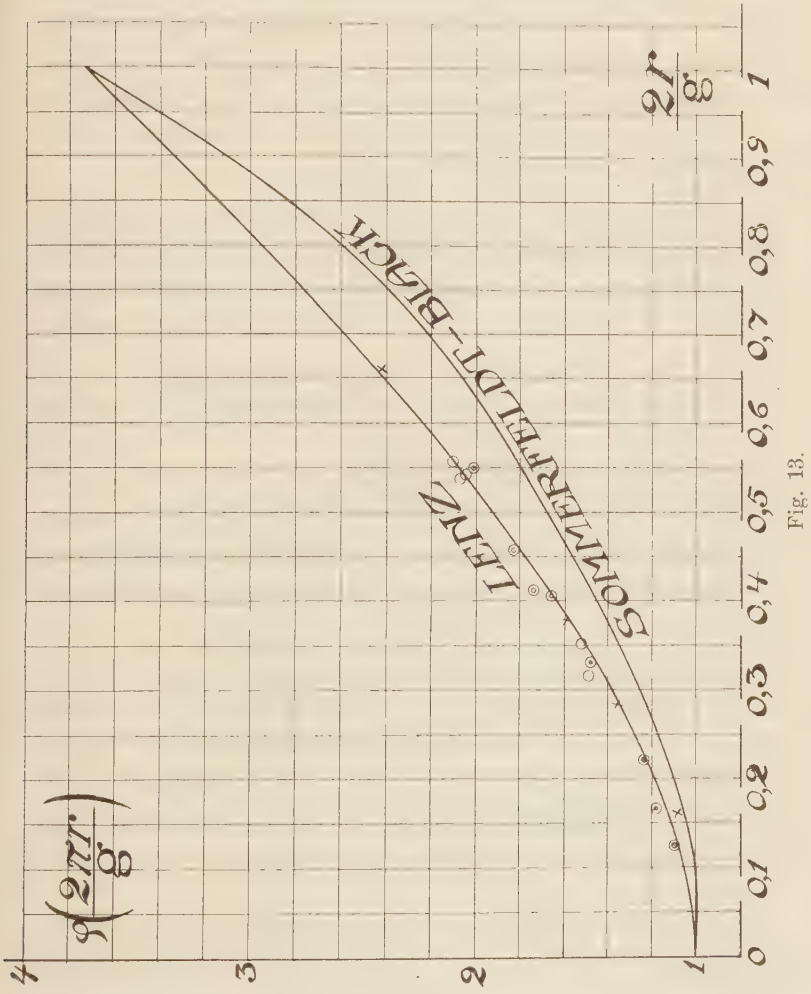


Fig. 13.

I fig. 13 ger jag dels Lenz' och Sommerfeldt-Black's $\varphi$-kurvor, dels har jag infört de av mig funna värdena på $\varphi$. För några av solenoiderna har jag beräknat $\varphi$ ur två mot-

ståndsbestämningar. I figuren äro för dem medeltalen för $\varphi$ införda.

Det råder, som man ser, en mycket nära överensstämmelse mellan mina mätningar och Lenz' teori. Mina värden visa dock någon tendens att ligga högre än Lenz' teori fordrar. Skillnaden är så liten, att den torde vara av ringa betydelse, men kan möjligen vara beroende på, att Lenz' förutsättningar ej uppfyllts vid mina försök.

Teorien förutsätter naturligtvis odämpade svängningar, under det svängningarna vid mina försök varit så starkt dämpade, att dekrementet uppgått till 0,2. Tack vare dämpningen bör enligt Rusch motståndet öka, enligt Esau däremot minska något.

Vidare förutsätter teorien kvasistationär ström. Lenz anger själv såsom kriterium för giltighet av formlerna i detta avseende, att den använda våglängen bör vara omkring 50 gånger så lång som solenoidtrådens längd. Vid den mätning, som jag utfört på solenoid n:o 1, har våglängden endast varit 20 gånger trådens längd. Det funna värdet på motståndet är emellertid lika med det enligt Lenz beräknade. Att mina värden synas ligga något högre än Lenz' $\varphi$-kurva, kan möjligen bero på förluster på grund av virvelströmmar i metalldelar, som varit placerade relativt nära solenoiderna, i första rummet kvicksilvret och klämskruven, som suttit omedelbart under solenoiden. Som andra förklaringar kunna även framhållas dielektriska förluster i glaset och eventuellt spår av järn i koppartråden.

Rätt egendomlig är den avvikelse från de övriga resultaten, som erhållits vid de i tabell 8 upptagna tre sista bestämningarna. De ur dessa beräknade $\varphi$-värdena överensstämma bättre med Sommerfeldt-Black's än med Lenz' kurva.

## Sammanfattning.

1. En kalorimetrisk metod har utarbetats, som tillåter bestämning av förhållandet $W' : W_0$ med hjälp av *en* rulle och *en* kalorimeter. Härvid har jag ej behövt företaga sådan justering att likströmmen, att den åstadkommer ett bestämt manometerutslag per tidsenhet.

2. Motståndsmätningar hava utförts på långa solenoider med olika gänghöjd och trådtjocklek vid mycket olika frekvenser.

3. Vid jämförelse mellan mätresultaten och olika forskares teoretiska formler visade Battelli's, Nicholson's och Esau's förändrade Picciati-formel dålig överensstämmelse. Någon ökning i motståndet vid växande gänghöjd, vilket Esau anser sig funnit, har jag icke kunnat konstatera.

4. Picciati's formel visade kvalitativt god överensstämmelse, men jämförelsen kunde ej drivas för långt, emedan Picciati ej tagit hänsyn till gänghöjden.

5. Mina värden på $W' : W_0$ ligga betydligt högre än de ur Sommerfeldt's teori med hjälp av den ur Black's mätningar interpolerade $\varphi\left(\frac{2\pi r}{g}\right)$-kurvan beräknade.

6. Mina mätningar visa stor överensstämmelse med Sommerfeldt-Lenz' teori vid helt skilda frekvenser och vid mycket olika gänghöjd.

## Originalobservationer.

I denna avdelning meddelas några fullständiga observationsserier. Till tre av dem meddelas kurvorna för manometerutslagen vid likström och till de två första dessutom resonansbestämningarna jämte resonanskurvor och de ur bestämningarna beräknade värdena på dekrementen. De ur dessa bestämningar beräknade svängningstalen återfinnas i tabell 3. För samtliga här meddelade serier gäller för galvanometerutslagens beroende av likströmsstyrkan nedanstående tabell 9. Dennas riktighet kontrollerades dagligen.

*Tabell 9.*

| $I$ amp. | $I^2$ | Galvanometerutslag $\zeta$ cm |
|---|---|---|
| 0,237 | 0,0562 | 0,68 |
| 0,263 | 0,0692 | 0,80 |
| 0,418 | 0,175 | 1,87 |
| 0,440 | 0,194 | 2,02 |
| 0,467 | 0,218 | 2,29 |
| 0,568 | 0,323 | 3,18 |

*Tabell 10.*

Solenoid n:o 1.

| Likström se fig. 14 | | | | | | | Växelström | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuter | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\gamma_1$ | $I_0$ | $I_0^2$ | Galvanometer 0-punkt | Galvanometer | $\zeta'$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\gamma_1'$ | $\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$ |
| 0,5 | 8,24 | 8,22 | 11,12 | 2,90 | 0,664 | 0,441 | 35,66 | 35,04 | 0,68 | 8,07 | 8,05 | 9,25 | 1,20 | 3,18 |
| 1 | 8,23 | 8,21 | 14,01 | 5,80 | | | | 35,04 | 0,68 | 8,07 | 8,05 | 10,49 | 2,44 | 3,27 |
| 1,5 | 8,22 | 8,21 | 16,62 | 8,41 | | | | 35,02 | 0,69 | 8,06 | 8,04 | 11,63 | 3,59 | 3,21 |
| 2 | 8,22 | 8,21 | 19,06 | 10,85 | | | | 34,98 | 0,70 | | 8,04 | 12,70 | 4,66 | 3,21 |
| 2,5 | " | 8,20 | 21,35 | 13,15 | | | | 35,01 | 0,70 | | 8,03 | 13,74 | 5,71 | 3,21 |
| 3 | | 8,20 | 23,41 | 15,21 | | | | 34,97 | 0,71 | | 8,03 | 14,69 | 6,66 | 3,21 |
| 0,5 | 9,05 | 8,86 | 10,57 | 1,71 | 0,507 | 0,257 | 35,71 | 34,94 | 0,77 | 8,21 | 8,11 | 9,45 | 1,34 | 3,08 |
| 1 | 9,00 | 8,82 | 12,20 | 3,38 | | | | 34,93 | 0,77 | 8,19 | 8,09 | 10,88 | 2,79 | 3,25 |
| 1,5 | 8,96 | 8,79 | 13,74 | 4,95 | | | | 34,92 | 0,78 | 8,17 | 8,08 | 12,18 | 4,10 | 3,22 |
| 2 | 8,89 | 8,75 | 15,13 | 6,38 | | | | 34,89 | 0,79 | 8,16 | 8,06 | 13,46 | 5,40 | 3,26 |
| 2,5 | | 8,72 | 16,46 | 7,74 | | | | 34,89 | 0,79 | 8,12 | 8,05 | 14,69 | 6,64 | 3,28 |
| 3 | | 8,68 | 17,65 | 8,97 | | | | 34,88 | 0,80 | | 8,03 | 15,86 | 7,83 | 3,29 |
| 0,5 | 8,94 | 8,81 | 10,00 | 1,19 | 0,418 | 0,175 | 35,71 | 34,90 | 0,81 | 8,28 | 8,19 | 9,68 | 1,49 | 3,23 |
| 1 | 8,91 | 8,78 | 11,08 | 2,30 | | | | 34,86 | 0,83 | 8,26 | 8,17 | 11,25 | 3,08 | 3,33 |
| 1,5 | 8,87 | 8,75 | 12,10 | 3,35 | | | | 34,82 | 0,85 | 8,23 | 8,15 | 12,80 | 4,65 | 3,34 |
| 2 | 8,84 | 8,72 | 13,05 | 4,33 | | | | 34,82 | 0,86 | 8,21 | 8,13 | 14,21 | 6,08 | 3,34 |
| 2,5 | | 8,69 | 13,98 | 5,29 | | | | 34,82 | 0,87 | | 8,11 | 15,49 | 7,38 | 3,28 |
| 3 | | 8,66 | 14,80 | 6,14 | | | | 34,82 | 0,87 | | 8,09 | 16,67 | 8,58 | 3,27 |
| | | | | | | | | | | | | | Medeltal | 3,25 |

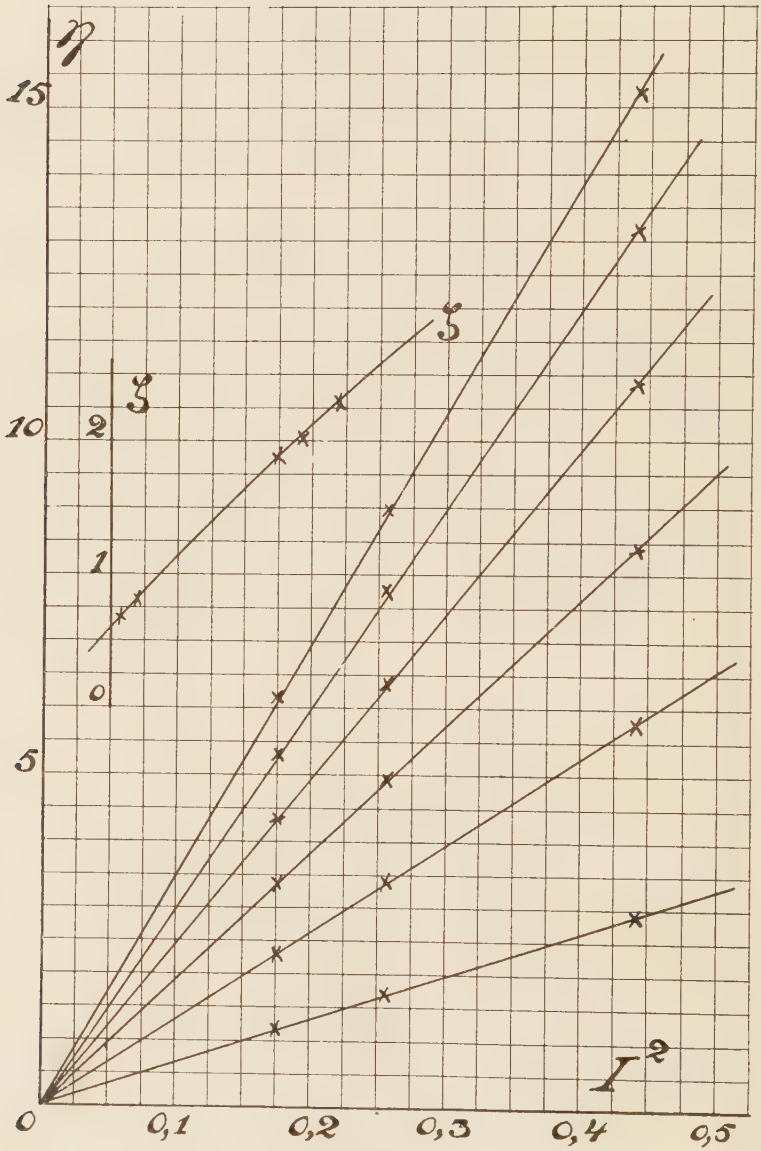


Fig. 14.

Resonansmätning till försöksserierna tabell 10.

Solenoid n:o 1. *Tab. 11.*

| Vridkondensatorns gradtal | Kapacitet el. st. (cm) | Elektr. luftterm. 0-pkt | Lufttermom. | ε mm | $\delta_1 + \delta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 79 | 907 | 49,0 | 77,1 | 28,1 | 0,36 |
| 80 | 919 | 49,8 | 79,6 | 29,8 | 0,32 |
| 81 | 930 | 50,5 | 81,8 | 31,3 | 0,29 |
| 82 | 940 | 51,2 | 84,1 | 32,9 | |
| 83 | 951 | 51,8 | 85,1 | 33,3 | |
| 84 | 962 | 52,4 | 85,4 | 33,0 | |
| 85 | 975 | 52,9 | 83,9 | 31,0 | |
| 86 | 986 | 53,5 | 83,0 | 29,5 | 0,31 |
| 87 | 998 | 54,1 | 72,3 | 28,2 | 0,35 |

Utslaget ε′ vid resonans med tillsatsmotstånd = 7,88 Ω.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 83 | 951 | 54,3 | 67,4 | 13,1 | |

Självinduktionsrulle n:r 1.

Tillsatsdekrement $\delta' = 0{,}23$.

Mätkretsens dekrement $\delta_2 = 0{,}15$.

$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}33$.

Primärkretsens dekrement $\delta_1 = 0{,}18$.

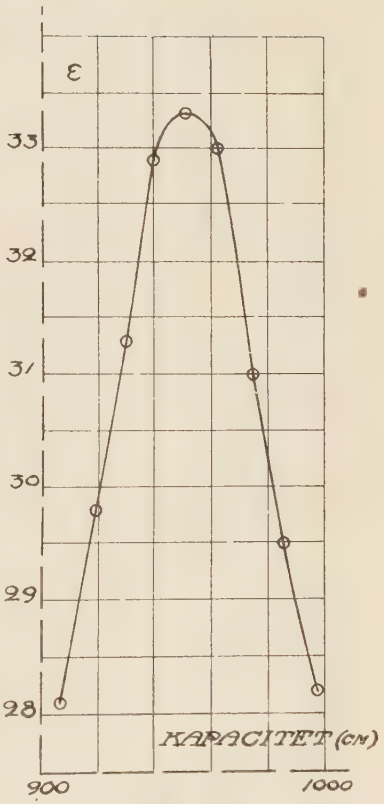


Fig. 15.

*Tabell 12.*

Solenoid n:o 2.

| Likström se fig. 16 | | | | | | | Växelström | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuter | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\gamma_i$ | $I_0$ | $I_0^2$ | Galvanometer 0-punkt | Galvanometer | $\Delta$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\gamma_i'$ | $\frac{\gamma_i'}{\gamma_i}$ |
| 0,5 | 8,09 | 8,08 | 8,38 | 0,30 | 0,440 | 0,194 | 36,32 | 35,25 | 1,07 | 9,20 | 9,18 | 9,87 | 0,69 | 5,72 |
| 1 | 8,09 | 8,08 | 8,66 | 0,58 | | | | 35,32 | 1,03 | 9,19 | 9,17 | 10,68 | 1,51 | 5,69 |
| 1,5 | 8,08 | 8,08 | 8,92 | 0,84 | | | | 35,32 | 1,02 | 9,18 | 9,17 | 11,39 | 2,22 | 5,70 |
| 2 | | 8,07 | 9,17 | 1,10 | | | | 35,22 | 1,04 | | 9,16 | 12,02 | 2,86 | 5,55 |
| 2,5 | | 8,07 | 9,43 | 1,36 | | | | 35,22 | 1,05 | | 9,16 | 12,77 | 3,61 | 5,63 |
| 3 | | 8,07 | 9,66 | 1,59 | | | | 35,33 | 1,04 | | 9,16 | 13,32 | 4,16 | 5,65 |
| 0,5 | 8,97 | 8,81 | 9,37 | 0,56 | 0,620 | 0,384 | 36,29 | 35,22 | 1,07 | 9,92 | 9,90 | 10,68 | 0,78 | 5,57 |
| 1 | 8,93 | 8,78 | 9,89 | 1,11 | | | | 35,18 | 1,09 | 9,94 | 9,88 | 11,49 | 1,61 | 5,73 |
| 1,5 | 8,90 | 8,75 | 10,43 | 1,68 | | | | 35,13 | 1,11 | 9,93 | 9,87 | 12,29 | 2,42 | 5,73 |
| 2 | 8,87 | 8,72 | 10,90 | 2,18 | | | | 35,13 | 1,13 | 9,91 | 9,86 | 13,05 | 3,19 | 5,62 |
| 2,5 | 8,84 | 8,70 | 11,39 | 2,69 | | | | 35,02 | 1,15 | | 9,85 | 13,82 | 3,97 | 5,59 |
| 3 | | 8,68 | 11,83 | 3,15 | | | | 35,10 | 1,16 | | 9,84 | 14,60 | 4,76 | 5,61 |
| 0,5 | 9,26 | 9,03 | 10,51 | 1,48 | 1,016 | 1,032 | 36,28 | 35,11 | 1,17 | 10,57 | 10,46 | 11,33 | 0,87 | 5,63 |
| 1 | 9,21 | 8,99 | 12,01 | 3,02 | | | | 35,08 | 1,19 | 10,54 | 10,43 | 12,16 | 1,73 | 5,60 |
| 1,5 | 9,17 | 8,96 | 13,44 | 4,48 | | | | 35,08 | 1,19 | 10,52 | 10,40 | 13,00 | 2,60 | 5,65 |
| 2 | 9,13 | 8,92 | 14,79 | 5,87 | | | | 35,08 | 1,19 | 10,49 | 10,38 | 13,85 | 3,47 | 5,68 |
| 2,5 | 9,10 | 8,89 | 16,07 | 7,18 | | | | 35,07 | 1,20 | | 10,35 | 14,77 | 4,42 | 5,66 |
| 3 | 9,06 | 8,85 | 17,35 | 8,50 | | | | 35,08 | 1,20 | | 10,33 | 15,25 | 4,92 | 5,60 |
| | | | | | | | | | | | | | Medeltal | 5,64 |

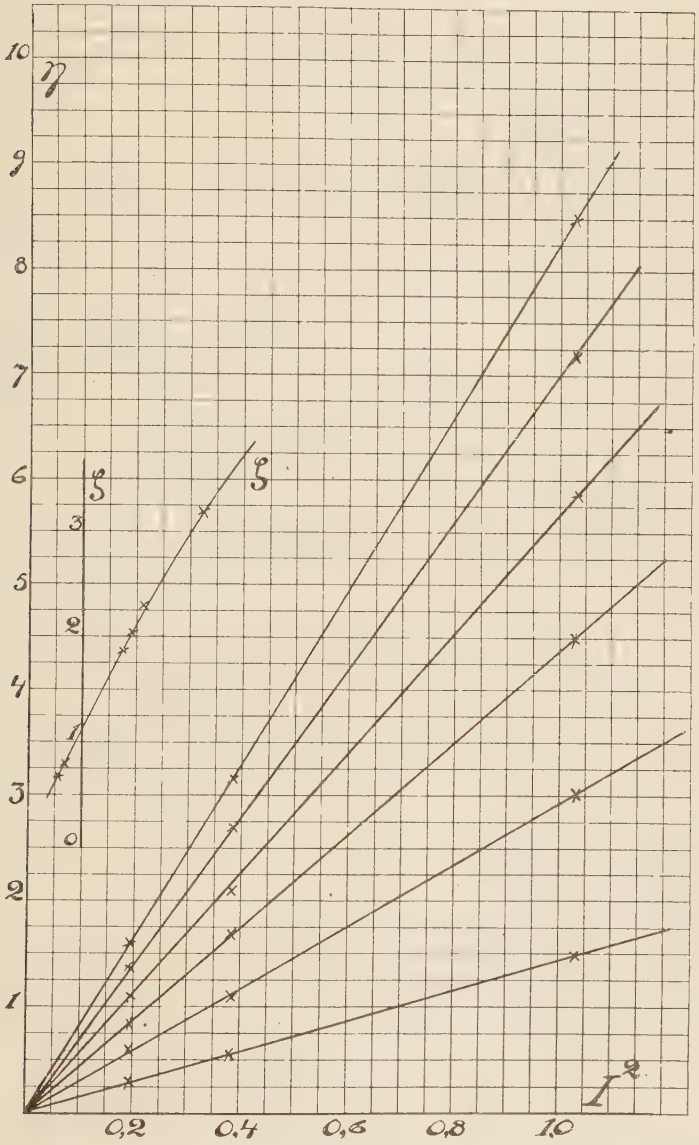


Fig. 16.

Resonansmätning till försöksserierna tabell 12.

Solenoid n:o 2. *Tab. 13.*

| Vridkondensatorns gradtal | Kapacitet el. st. (cm) | Elektr. luftterm. 0-pkt | Lufttermom. | ε mm | $\delta_1 + \delta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 109 | 1250 | 55,7 | 96,6 | 40,9 | 0,37 |
| 111 | 1271 | 57,2 | 102,2 | 45,0 | 0,36 |
| 113 | 1295 | 58,5 | 107,1 | 48,6 | |
| 115 | 1319 | 59,5 | 109,2 | 49,7 | |
| 117 | 1340 | 60,8 | 109,2 | 48,4 | |
| 119 | 1364 | 61,8 | 106,4 | 44,6 | 0,31 |
| 121 | 1387 | 62,7 | 103,9 | 41,2 | 0,34 |
| Utslaget $\varepsilon'$ vid resonans med tillsatsmotstånd = 7,88 Ω. | | | | | |
| 115 | 1319 | 63,5 | 83,6 | 20,1 | |

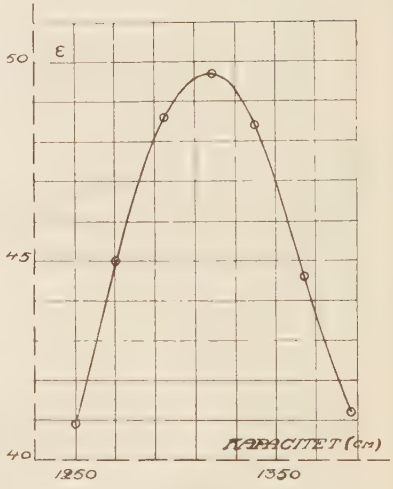


Fig. 17.

Självinduktionsrulle n:r 1.
Tillsatsdekrement $\delta' = 0{,}27$.
Mätkretsens dekrement $\delta_2 = 0{,}18$.
$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}35$.
Primärkretsen dekrement $\delta_1 = 0{,}17$.

*Tabell 14.*

Solenoid n:o 2.

| Likström se fig. 18 | | | | | | | Växelström | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuter | Manom. O-punkts förflyttn. | Manom. O-punkt | Manom. | $\gamma_i$ | $I_0$ | $I_0^2$ | Galvanometer O-punkt | Galvanometer | $\delta$ | Manom. O-punkts förflyttn. | Manom. O-punkt | Manom. | $\gamma_i'$ | $\frac{\gamma_i'}{\gamma_i}$ |
| 0,5 | 11,32 | 11,27 | 12,28 | 1,01 | 0,826 | 0,681 | 36,25 | 33,0 | 3,25 | 8,09 | 8,09 | 10,49 | 2,40 | 4,95 |
| 1 | 11,31 | 11,26 | 13,28 | 2,02 | | | | 33,20 | 3,15 | 8,09 | 8,09 | 12,80 | 4,71 | 5,09 |
| 1,5 | 11,29 | 11,25 | 14,22 | 2,97 | | | | 33,40 | 3,05 | 8,09 | 8,09 | 14,78 | 6,69 | 5,01 |
| 2 | 11,28 | 11,24 | 15,12 | 3,88 | | | | 33,30 | 3,02 | 8,09 | 8,09 | 16,48 | 8,39 | 4,82 |
| 2,5 | | 11,23 | 15,99 | 4,76 | | | | 33,45 | 2,98 | | 8,09 | 18,14 | 10,05 | 4,72 |
| 3 | | 11,22 | 16,84 | 5,62 | | | | — | — | | — | — | — | — |
| 0,5 | 12,80 | 12,54 | 13,10 | 0,56 | 0,611 | 0,373 | 36,23 | 33,11 | 3,12 | 9,18 | 9,09 | 11,33 | 2,24 | 4,80 |
| 1 | 12,73 | 12,48 | 13,60 | 1,12 | | | | 33,30 | 3,03 | 9,16 | 9,07 | 13,35 | 4,28 | 4,74 |
| 1,5 | 12,67 | 12,42 | 14,08 | 1,66 | | | | 33,00 | 3,09 | 9,13 | 9,05 | 15,66 | 6,61 | 4,90 |
| 2 | 12,60 | 12,36 | 14,55 | 2,19 | | | | 32,98 | 3,13 | 9,11 | 9,03 | 17,61 | 8,58 | 4,80 |
| 2,5 | | 12,30 | 14,99 | 2,69 | | | | 33,00 | 3,15 | | 9,01 | 19,58 | 10,57 | 4,64 |
| 3 | | 12,24 | 15,43 | 3,19 | | | | — | — | | — | — | — | — |
| 0,5 | 12,49 | 12,38 | — | — | 0,997 | 0,994 | 36,23 | 32,69 | 3,54 | 9,56 | 9,47 | 12,10 | 2,63 | 4,91 |
| 1 | 12,46 | 12,35 | 15,25 | 2,90 | | | | 32,67 | 3,55 | 9,54 | 9,45 | 14,78 | 5,33 | 4,94 |
| 1,5 | 12,43 | 12,33 | 16,64 | 4,31 | | | | 32,78 | 3,52 | 9,52 | 9,43 | 17,06 | 7,63 | 4,85 |
| 2 | 12,40 | 12,30 | 17,98 | 5,68 | | | | 32,80 | 3,50 | 9,49 | 9,41 | 19,29 | 9,88 | 4,82 |
| 2,5 | | 12,28 | 19,35 | 7,07 | | | | 32,80 | 3,48 | | 9,39 | 21,32 | 11,93 | 4,70 |
| 3 | | 12,25 | 20,44 | 8,19 | | | | — | — | | — | — | — | — |

Medeltal 4,84

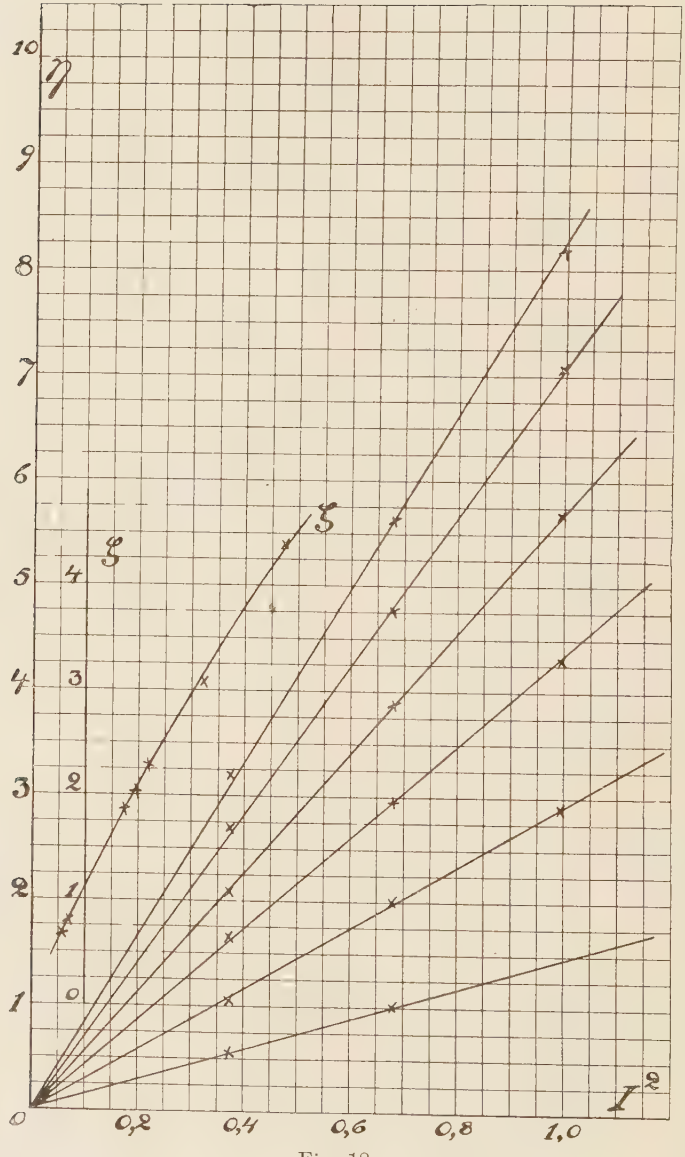


Fig. 18.

*Tabell 15.*

Solenoid n:o 2.

| Växelström | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuter | Galv. 0-punkt | Galv. | $\mathfrak{T}$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\gamma_i'$ | $\frac{\gamma_i'}{\mathfrak{T}}$ |
| 0,5 | 35,73 | 33,51 | 2,22 | 8,15 | 8,12 | 9,39 | 1,27 | 4,08 |
| 1 | | 33,46 | 2,24 | 8,14 | 8,11 | 10,74 | 2,63 | 4,10 |
| 1,5 | | 33,47 | 2,25 | 8,13 | 8,10 | 11,96 | 3,86 | 4,13 |
| 2 | | 33,51 | 2,24 | | 8,09 | 13,12 | 5,03 | 4,12 |
| 2,5 | | 33,47 | 2,25 | | 8,08 | 14,21 | 6,13 | 3,98 |
| 3 | | 33,44 | 2,26 | | 8,07 | 15,30 | 7,23 | 3,98 |
| 0,5 | 35,73 | 33,53 | 2,20 | 8,67 | 8,54 | 9,81 | 1,27 | 4,09 |
| 1 | | 33,43 | 2,25 | 8,63 | 8,51 | 11,14 | 2,63 | 4,11 |
| 1,5 | | 33,32 | 2,30 | 8,60 | 8,49 | 12,41 | 3,92 | 4,08 |
| 2 | | 33,30 | 2,34 | 8,56 | 8,46 | 13,70 | 5,24 | 4,07 |
| 2,5 | | 33,30 | 2,35 | | 8,44 | 14,90 | 6,46 | 3,99 |
| 3 | | 33,30 | 2,37 | | 8,42 | 16,03 | 7,61 | 4,00 |
| 0,5 | 35,71 | 33,47 | 2,24 | 8,96 | 8,82 | 10,08 | 1,26 | 4,00 |
| 1 | | 33,49 | 2,23 | 8,92 | 8,79 | 11,39 | 2,60 | 4,09 |
| 1,5 | | 33,40 | 2,26 | 8,88 | 8,76 | 12,62 | 3,86 | 4,13 |
| 2 | | 33,48 | 2,25 | 8,85 | 8,73 | 13,79 | 5,06 | 4,07 |
| 2,5 | | 33,49 | 2,24 | | 8,70 | 14,88 | 6,18 | 4,03 |
| 3 | | 33,49 | 2,25 | | 8,68 | 15,86 | 7,18 | 3,98 |
| Likströmsbestämning se tabell 14 | | | | | Medeltal | | | 4,05 |

*Tabell 16.*

Solenoid n:o 2.

| Växelström | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Galv. 0 punkt | Galv. | $\mathfrak{T}$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\gamma_i'$ | $\frac{\gamma_i'}{\gamma_i}$ |
| 35,59 | 32,75 | 2,84 | 9,58 | 9,43 | 10,86 | 1,43 | 3,42 |
| | 32,08 | 3,17 | 9,54 | 9,40 | 12,46 | 3,06 | 3,25 |
| | 31,61 | 3,44 | 9,50 | 9,36 | 14,24 | 4,88 | 3,22 |
| | 31,80 | 3,53 | 9,46 | 9,33 | 16,15 | 6,82 | 3,20 |
| | 32,06 | 3,53 | | 9,29 | 17,80 | 8,51 | 3,36 |
| | 32,05 | 3,53 | | 9,26 | 19,24 | 9,98 | 3,30 |
| 35,74 | 33,32 | 2,42 | 9,46 | 9,46 | 10,64 | 1,18 | 3,42 |
| | 32,72 | 2,72 | 9,46 | 9,46 | 12,00 | 2,54 | 3,33 |
| | 32,52 | 2,89 | 9,46 | 9,46 | 13,50 | 4,04 | 3,22 |
| | 32,68 | 2,93 | 9,46 | 9,46 | 14,97 | 5,51 | 3,29 |
| | 32,78 | 2,94 | 9,46 | 9,46 | 16,31 | 6,85 | 3,26 |
| | 32,73 | 2,95 | 9,46 | 9,46 | 17,62 | 8,16 | 3,31 |
| 35,75 | 32,94 | 2,81 | 10,92 | 10,71 | 12,07 | 1,36 | 3,31 |
| | 32,96 | 2,80 | 10,86 | 10,66 | 13,41 | 2,75 | 3,34 |
| | 32,95 | 2,80 | 10,81 | 10,61 | 14,67 | 4,06 | 3,38 |
| | 33,00 | 2,79 | 10,76 | 10,56 | 15,90 | 5,34 | 3,37 |
| | 33,02 | 2,78 | | 10,52 | 16,99 | 6,47 | 3,28 |
| | 32,60 | 2,84 | | 10,48 | 18,16 | 7,68 | 3,27 |
| Likströmsbestämning se tabell 14 | | | | Medeltal | | | 3,31 |

*Tabell 17.*

Solenoid n:o 2.

| Växelström | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Galv. 0-punkt | Galv.-meter | $\zeta'$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\eta'$ | $\frac{\eta'}{\eta}$ |
| 35,63 | 33,63 | 2,00 | 10,29 | 10,27 | 10,96 | 0,69 | 2,50 |
| | 33,72 | 1,96 | 10,29 | 10,27 | 11,59 | 1,32 | 2,52 |
| | 33,81 | 1,91 | 10,28 | 10,27 | 12,21 | 1,94 | 2,52 |
| | 33,85 | 1,88 | 10,28 | 10,26 | 12,78 | 2,52 | 2,54 |
| | 33,69 | 1,89 | | 10,26 | 13,35 | 3,09 | 2,47 |
| | 33,66 | 1,90 | | 10,26 | 13,92 | 3,66 | 2,47 |
| 35,63 | 33,78 | 1,85 | 10,63 | 10,63 | 11,29 | 0,66 | 2,61 |
| | 33,81 | 1,83 | 10,63 | 10,63 | 11,96 | 1,33 | 2,65 |
| | 33,60 | 1,90 | 10,63 | 10,63 | 12,64 | 2,01 | 1,64 |
| | 33,65 | 1,92 | | 10,63 | 13,28 | 2,65 | 2,60 |
| | 33,41 | 1,98 | | 10,63 | 13,95 | 3,32 | 2,55 |
| | 33,68 | 1,98 | | 10,63 | 14,61 | 3,98 | 2,58 |
| 35,67 | 33,65 | 2,02 | 10,79 | 10,79 | 11,54 | 0,75 | 2,67 |
| | 33,38 | 2,15 | 10,79 | 10,79 | 12,34 | 1,55 | 2,53 |
| | 33,21 | 2,26 | 10,79 | 10,79 | 13,11 | 2,32 | 2,47 |
| | 33,52 | 2,23 | | 10,79 | 13,89 | 3,10 | 2,55 |
| | 33,52 | 2,21 | | 10,79 | 14,51 | 3,72 | 2,48 |
| | 33,42 | 2,22 | | 10,79 | 15,29 | 4,50 | 2,54 |
| Likströmsbestämning se tabell 14. | | | Medeltal | | | | 2,55 |

*Tabell 18.*

Solenoid n:o 3.

| Likström | | | | | | | Växelström | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuter | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\eta$ cm | $I_0$ | $I_0^2$ | Galvanometer 0-punkt | Galvanometer | $\zeta$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\eta'$ | $\frac{\eta'}{\eta}$ |
| 0,5 | 9,37 | 9,23 | 9,74 | 0,51 | 0,537 | 0,288 | 35,76 | 33,99 | 1,77 | 8,37 | 8,34 | 9,85 | 1,51 | 5,10 |
| 1 | 9,33 | 9,19 | 10,21 | 1,02 | | | | 33,92 | 1,80 | 8,36 | 8,33 | 11,54 | 3,21 | 5,35 |
| 1,5 | 9,30 | 9,16 | 10,66 | 1,50 | | | | 33,90 | 1,82 | 8,35 | 8,33 | 13,18 | 4,85 | 5,38 |
| 2 | 9,26 | 9,13 | 11,13 | 2,00 | | | | 33,88 | 1,84 | 8,35 | 8,32 | 14,73 | 6,41 | 5,34 |
| 2,4 | | 9,10 | 11,55 | 2,45 | | | | 33,82 | 1,86 | 8,34 | 8,32 | 16,23 | 7,91 | 5,30 |
| 3 | | 9,07 | 11,96 | 2 89 | | | | 33,82 | 1,87 | | 8,32 | 17,72 | 9,40 | 5,33 |
| 0,5 | 8,88 | 8,78 | 9,66 | 0,88 | 0,698 | 0,487 | 35,70 | 34,19 | 1,51 | 8,69 | 8,63 | 9,90 | 1,27 | 5,09 |
| 1 | 8,85 | 8,75 | 10,49 | 1,74 | | | | 34,18 | 1,51 | 8,68 | 8,61 | 11,27 | 1,66 | 5,44 |
| 1,5 | 8,83 | 8,72 | 11,31 | 2,59 | | | | 34,09 | 1,55 | 8,66 | 8,60 | 12,58 | 3,98 | 5,28 |
| 2 | 8,80 | 8,70 | 12,08 | 3,38 | | | | 34,09 | 1,56 | 8,64 | 8,59 | 13,93 | 5,34 | 5,38 |
| 2,5 | | 8,68 | 12,86 | 4,18 | | | | 34,00 | 1,59 | | 8,58 | 15,22 | 6,64 | 5,34 |
| 3 | | 8,66 | 13,58 | 4,92 | | | | 33,93 | 1,62 | | 8,57 | 16,54 | 7,97 | 5,28 |
| 0,5 | 9,23 | 9,06 | 10,81 | 1,75 | 0,999 | 0,988 | 35,70 | 34,19 | 1,52 | 9,30 | 9,16 | 10,41 | 1,25 | 5,07 |
| 1 | 9,18 | 9,02 | 12,55 | 3,53 | | | | 34,11 | 1,55 | 9,26 | 9,12 | 11,78 | 2,66 | 5,30 |
| 1,5 | 9,14 | 8,98 | 14,26 | 5,28 | | | | 34,12 | 1,56 | 9,23 | 9,09 | 13,14 | 4,05 | 5,36 |
| 2 | 9,10 | 8,94 | 15,88 | 6,94 | | | | 34,06 | 1,58 | 9,19 | 9,06 | 14,45 | 5,39 | 5,39 |
| 2,5 | | 8,90 | 17,48 | 8,58 | | | | 34,11 | 1,59 | | 9,03 | 15,67 | 6,64 | 5,34 |
| 3 | | 8,87 | 18,94 | 10,07 | | | | 34,02 | 1,60 | | 9,00 | 16,84 | 7,84 | 5,26 |
| | | | | | | | | | | | | | Medeltal | 5,30 |

*Tabell 19.*

Solenoid n:o 3.

| Växelström | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minuter | Galvanom. 0-punkt | Galvanometer | $\zeta'$ | Manom. 0-punkts förflyttn. | Manom. 0-punkt | Manom. | $\eta'$ | $\frac{\eta'}{\eta}$ |
| 0,5 | 35,75 | 33,76 | 1,99 | 9,34 | 9,17 | — | — | — |
| 1 | | 33,58 | 2,08 | 9,30 | 9,13 | 12,23 | 3,10 | 4,38 |
| 1,5 | | 33,51 | 2,13 | 9,25 | 9,10 | 13,55 | 4,45 | 4,12 |
| 2 | | 33,40 | 2,19 | 9,21 | 9,06 | 15,25 | 6,19 | 4,26 |
| 2,5 | | 33,31 | 2,24 | | 9,03 | 16,94 | 7,91 | 4,25 |
| 3 | | 33,28 | 2,28 | | 9,00 | 18,50 | 9,50 | 4,28 |
| 0,5 | 35,71 | 33,77 | 1,94 | 8,67 | 8,65 | 9,96 | 1,31 | 4,23 |
| 1 | | 33,65 | 2,00 | 8,66 | 8,64 | 11,48 | 2,84 | 4,17 |
| 1,5 | | 33,68 | 2,01 | 8,65 | 8,64 | 13,01 | 4,37 | 4,28 |
| 2 | | 33,59 | 2,04 | | 8,63 | 14,44 | 5,81 | 4,23 |
| 2,5 | | 33,58 | 2,06 | | 8,63 | 16,02 | 7,39 | 4,22 |
| 3 | | 33,61 | 2,06 | | 8,63 | 17,28 | 8,65 | 4,24 |
| 0,5 | 35,70 | 33,53 | 2,17 | 9,38 | 9,22 | 10,84 | 1,62 | 4,32 |
| 1 | | 33,47 | 2,23 | 9,34 | 9,18 | 12,47 | 3,29 | 4,27 |
| 1,5 | | 33,22 | 2,33 | 9,30 | 9,14 | 14,24 | 5,10 | 4,25 |
| 2 | | 33,14 | 2,40 | 9,26 | 9,10 | 15,87 | 6,77 | 4,15 |
| 2,5 | | 33,12 | 2,44 | | 9,06 | 17,81 | 8,75 | 4,24 |
| 3 | | 33,15 | 2,44 | | 9,03 | 19,23 | 10,20 | 4,22 |
| Likströmsbestämning se tabell 18 | | | | | | Medeltal | | 4,24 |